Санкт-Петербургское государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Училище олимпийского резерва № 1»

ПРИНЯТО
Педагогическим советом
протокол № 13 от 18 июня 2024 г.

Подписано цифровой подписью: Кузнецов Виктор Александрович
DN: E=uc_fk@roskazna.ru, S=77 Москва, ИНН ЮЛ=7710568760, ОГРН=1047797019830, STREET="Большой Златоустинский переулок, д. 6, строение 1", L=г. Москва, C=RU, O=Казначейство России, CN=Казначейство России
Дата: 19 Июнь 2024 г. 17:28:50

УТВЕРЖДАЮ
ДИРЕКТОР СПб ГБПОУ «УОР № 1»

________________ В.А. КУЗНЕЦОВ

19 июня 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

БД.06 МАТЕМАТИКА

программа подготовки специалистов среднего звена
49.02.01 Физическая культура

Санкт-Петербург
2024 год

Организация-разработчик: Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Училище олимпийского резерва № 1».

Разработчик: Березина М.Г., преподаватель дисциплины БД.06 Математика.

Рассмотрено на заседании предметно-цикловой комиссии общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин СПб ГБПОУ «УОР № 1»

Протокол № 10 от 31 мая 2024 г.

Председатель предметно-цикловой комиссии общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин – А.В. Тимофеева

Утверждено приказом СПб ГБПОУ «УОР № 1» от 19.06.2024 № 181 «Об утверждении учебных планов, графиков учебного процесса, рабочих программ учебных дисциплин (модулей) и практик, фондов оценочных средств, учебно-методических рекомендаций, рабочей программы воспитания, календарного плана воспитательной работы на 2024-2025 учебный год – образовательных программ среднего профессионального образования по специальности 49.02.01 Физическая культура»

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	4
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ БД. 06 МАТЕМАТИКА	7
Практическая работа № 1. Тема: «Аксиомы стереометрии и их следствия»	7
Практическая работа № 2-3. Тема: «Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости».	9
Практическая работа № 4-6. Тема: «Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей. Прямоугольный параллелепипед».	11
Практическая работа № 7. Тема: «Векторы в пространстве».	13
Практическая работа № 8. Тема «Уравнение плоскости .Расстояния между двумя точками»	15
Практическая работа № 9,10. Тема: «Сечение куба, призмы, пирамиды».	16
Практическая работа № 11, 12. Тема: «Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции. Преобразование графиков функций»	17
Практическая работа № 13, 14. Тема: «Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств»	21
Практическая работа № 15. Тема: «Понятие производной функции. Производная степенной функции»	22
Практическая работа № 16. Тема: «Геометрический и физический смысл производной»	25
Практическая работа № 17, 18. Тема: «Применение производной при исследовании функции на монотонность и экстремумы»	28
Практическая работа № 19. Тема: «Виды призм и пирамид»	36
Практическая работа № 20. Тема: «Вычисление элементов пространственных фигур»	38
Практическая работа № 21. Тема: «Изображение тел вращения на плоскости»	40
Практическая работа № 22. Тема: «Примеры симметрий в профессии»	42
Практическая работа № 23. Тема: «Решение задач. Многогранники и тела вращения»	44
Практическая работа № 24, 25. Тема: «Преобразование иррациональных выражений»	46
Практическая работа № 26. Тема: «Решение иррациональных уравнений»	49
Практическая работа № 27. Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»	51
Практическая работа № 28. Тема: «Логарифм числа. Свойства логарифмов. Операция логарифмирования»	54
Практическая работа № 29. Тема: «Решение логарифмических уравнений и неравенств»	57
Практическая работа № 30. Тема: «Решение уравнений различных видов»	59
Практическая работа № 31. Тема: «Сложение и умножение вероятностей»	60
Практическая работа № 32. Тема: «Вероятность в профессиональных задачах»	63
Практическая работа № 33. Тема: «Решение задач на вероятность»	65
Практическая работа № 34. Тема: «Работа с таблицами, графиками, диаграммами»	66
Практическая работа № 35. Тема: «Решение задач на статистику»	70

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических заданий представляют собой часть учебно-методического комплекта по учебной дисциплине БД.06 Математика и соответствуют требованиям ФГОС и рабочей программе по дисциплины.

Целью создания разработки является оказание помощи студентам первого курса в освоении учебного материала по дисциплине в учреждениях среднего профессионального образования.

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов. Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями.

Выполнению практических заданий (работ) предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические задания носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, порядок выполнения работы, контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание. Структура проведения сводится к следующему:

-сообщение темы и цели работы;

-актуализация теоретических знаний, которые необходимы для практической деятельности;

-разработка алгоритма проведения практической деятельности;

-непосредственное проведение практических работ;

-оформление работы в тетрадях для практических работ;

-обобщение и систематизация полученных результатов.

Методическая разработка содержит все структурные элементы для организации и проведения практических занятий. Представленные практические задания разнообразны по характеру и степени сложности. Некоторые содержат устные задания базового уровня («ответить на вопросы»), выполнение которых обязательны, для того чтобы приступить ко второму блоку – решение практических заданий.

Цели практических занятий:

-помочь студентам систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;

-научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;

-научить их пользоваться справочной литературой;

-формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате проведения практических занятий по дисциплине «Математика» студент должен знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;

- широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;

- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;

- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;

- находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы; использовать графический метод решения уравнений и неравенств;

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин; описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды; вычисление объемов и площадей поверхностей пространственных тел.

Критерии оценки практических заданий

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине БД.06 Математика.

Отметка «5» ставится, если: работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4»ставится, если: работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если: допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой. К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения. Обобщенные требования к студентам при выполнении практических работ:

а) теоретически подготовиться к выполнению работы;

б) выполнить работу в полном объеме с соблюдением необходимых требований к еѐ выполнению;

в) оформить отчет правильно и аккуратно, выполнить расчеты;

г) самостоятельно выполнить индивидуальное задание, ответить на контрольные вопросы и сделать выводы;

д) при наличии пропуска соблюсти порядок выполнения пропущенных практических работ.

Порядок выполнения пропущенных работ:

а) при наличии пропуска студент обязан изучить материал самостоятельно, предварительно взяв задание у преподавателя;

б) подготовить отчѐт о практической работе, соблюдая все требования, предъявляемые к выполнению практических работ;

в) сдать преподавателю практическую работу при следующей явке.

Организация выполнения и контроля практических работ по дисциплине БД.06 Математика является подготовительным этапом к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Задания для самостоятельного выполнения по БД.06 Математика, вопросы и задания составлены в соответствии разделами и темами рабочей программы дисциплины БД.06 Математика для удобства при выполнении практической работы студентов к учебным занятиям.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ БД. 06 МАТЕМАТИКА

Практическая работа №1
Тема: «Аксиомы стереометрии и их следствия»

Цель: решение разнообразных задач на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве, опираясь на три аксиомы стереометрии и два следствия из них.

Оснащение занятия: учебник, конспект, справочник.

Порядок выполнения работы:

Теоретические сведения: Аксиомы стереометрии и следствия из них устанавливают взаимоотношения между основными фигурами стереометрии: точкой, прямой и плоскостью.

-Точка может лежать на прямой, может не лежать на прямой.

-Прямая может принадлежать плоскости, может не принадлежать плоскости.

-Плоскость может проходить через прямую, не проходить через нее, содержать точку, не содержать точку. Подобные задачи мы решали для пирамиды и для параллелепипеда. Теперь мы будем решать задачи в общем виде. Вспомним для этого сначала аксиомы и теоремы-следствия. *Аксиома 1 (А1*) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

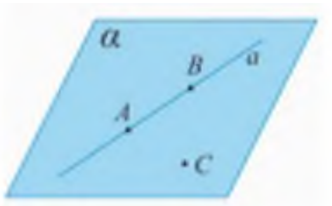


Рис. 1.

Рассмотрим три точки: A, B, C, причем точка C не принадлежит прямой AB: $C \notin AB$ (Рис. 1.). Тогда через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость α, и притом только одна. Плоскость α можно также обозначить через три точки ABC.

Иллюстрация аксиомы А1.

Аксиома 2 (А2) Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

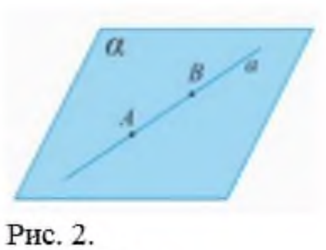


Рис. 2.

$$\begin{cases} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{cases} \Rightarrow AB \in \alpha.$$

Иллюстрация аксиомы А2. (Рис. 2.)

Аксиома 3 (А3). Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей (плоскости пересекаются по прямой).

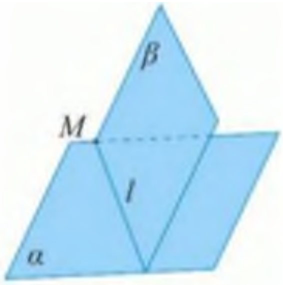


Рис. 3.

$$\begin{cases} M \in \alpha \\ M \in \beta \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap \beta = l.$$

Иллюстрация аксиомы А3. (Рис. 3.)

Повторение теорем, которые следуют из аксиом стереометрии.

Теорема 1 Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Теорема 2 Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Задание1.

Решите задачи:

1.Даны две прямые, которые пересекаются в точке М. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку М и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости.

2.Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

3.Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости а . Лежат ли 2 другие вершины параллелограмма в плоскости а?

4.Дана прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

5.Верно ли утверждение: а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости; б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

6.Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться?

7.а) Верно ли, что любые 3 точки лежат в одной плоскости?

б) Верно ли, что любые 4 точки лежат в одной плоскости?

в) Верно ли, что любые 4 точки не лежат в одной плоскости?

г) Верно ли, что через любые 3 точки проходит плоскость, и притом только одна?

Задание 2.Ответьте на контрольные вопросы: 1.Что такое аксиома? 2.Какие аксиомы планиметрии вы знаете?

Литература:

Геометрия. 10-11 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) /Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б., С.Б.Кадомцев и др.-М.: Просвещение, 2022.-255с.

Практическая работа №2-3

Тема: «Параллельность прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости».

Цели: научиться выполнять чертеж к задачам; научиться применять знания по данной теме при решении и доказательстве задач.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, схемы, карточки.

Порядок выполнения работы:

Теоретические сведения:

<u>Определение</u>. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. <u>Признак параллельности плоскостей</u>. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.(рис.1)

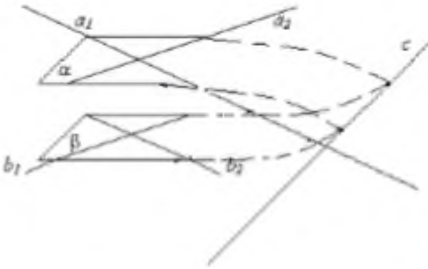


рис.1

Признак параллельности прямой и плоскости: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.(рис.2)

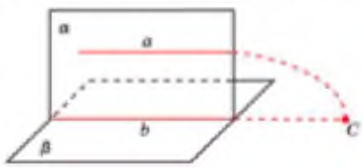


рис.2

Теорема. Если две параллельные плоскости пересекаются третей, то прямые пересечения параллельны.(рис.3)

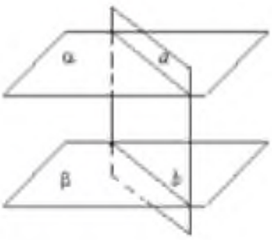


рис.3

Теорема. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны. (рис4)

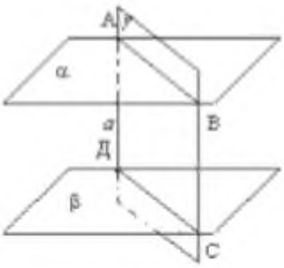


рис.4

Задание 1.Письменно ответьте на вопросы:

1.*Закончите утверждение*:

1. Если две плоскости имеют общую точку, то …

2. Две плоскости не параллельны, если …

3. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то …

4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то эти вторые прямые …

5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость

6. Запишите параллельные плоскости параллелепипеда A…D1.

2. *Верны ли утверждения*:

1.Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

2. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3.Существует бесконечно много прямых, параллельных данной плоскости и проходящих через точку, не принадлежащую этой плоскости.

4. Если одна из двух данных плоскостей параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3. *Докажите утверждение*:

1. Докажите, что две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.

2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях a и b (рис. 2). Как могут располагаться относительно друг друга прямые AC и BD? Могут ли они быть параллельными?

3. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях a и b (рис. 3). Как могут располагаться относительно друг друга прямые AD и BC?

Задание 2. Выполните: № 17, № 20, № 23, № 30.

Задание 3. Ответить на контрольные вопросы:

1.Что изучает стереометрия?

2.Каковы основные (простейшие) фигуры в пространстве?

3.Сформулируйте теорему о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.

4.Каково может быть взаимное расположение двух прямых в пространстве? 5.Какие прямые в пространстве называются параллельными? скрещивающимися? 6.Сформулируйте лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми. 7.Сформулируйте теорему о параллельности трех прямых. 8.Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве? 9.В каком случае прямая и плоскость называются параллельными? 10.Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

Литература: Атанасян Л. С. Геометрия 10-11 кл., стр.9-11.

Практическая работа №4-6

Тема: «Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикулярностьплоскостей. Прямоугольный параллелепипед».

Цели: научиться строить рисунок к задаче; научиться применять знания по данной теме при решении задач.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, многогранники, карточки.

Порядок выполнения работы:

Теоретические сведения:

<u>Определение.</u> Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом.

<u>Определение</u>. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной.

<u>Определение</u>. Наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой (плоскости), называется отрезок, соединяющий данную точку с любой точкой прямой(плоскости), не являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из этой же точки на данную прямую(плоскость).

<u>Определение</u>. Прямая называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости.

<u>Признак перпендикулярности прямой и плоскости</u>. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

<u>Теорема</u>. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

<u>Теорема</u>. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

<u>Определение</u>: Угол между прямой и плоскостью есть угол между этой прямой и еè проекцией на эту плоскость.

Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и наклонной. (рис.3)

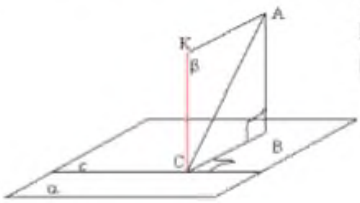


рис.3

Задание 1. Выполните № 116(а), № 117, № 149, № 155, № 151, № 167,№ 178, № 187(в), № 188, № 189.

Задание 2. Ответьте на контрольные вопросы:

1.Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

2.Сформулируйте определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

3.Что называется расстоянием от точки до плоскости?

4.Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах (прямую и обратную).

5.Какая фигура называется двугранным углом? Приведите примеры.

6.Как измеряется двугранный угол?

7.Назвать виды двугранных углов.

8.Решить задачу: В тетраэдре PABC угол ABC равен 90^0, прямая PB перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что угол PCB – линейный угол двугранного угла с ребром AC.

9.Какие две плоскости называются перпендикулярными? Приведите пример.

10.Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.

11.Решите задачу: Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и ВД на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если СД=АС=6см, ВД=7см.

12.Какой параллелепипед называется прямоугольным?

13.Сформулируйте свойства прямоугольного параллелепипеда.

14.Что называют измерениями прямоугольного параллелепипеда?

15.Сформулируйте свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями.

Литература: Атанасян Л. С. Геометрия 10-11 кл., стр.36, стр.40, стр.49-53.

Практическая работа №7
Тема: «Векторы в пространстве».

Цель : закрепить знания и совершенствовать умения поданной теме.
Оснащение занятия: учебник, конспекты, карточки.
Порядок выполнения работы:
Теоретические сведения:

Определение: Вектором называется направленный отрезок ; точка - начало, точка - конец вектора.

Определение: Два коллинеарных вектора и называются сонаправленными, если их направления совпадают.

Два коллинеарных вектора и называются противоположно направленными, если их направления противоположны: .

Определение: Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной плоскости.

Действия над векторами: Сложение векторов и осуществляется по правилу треугольника. Суммой двух векторов и называют такой третий вектор , начало которого совпадает с началом , а конец - с концом при условии, что конец вектора и начало вектора совпадают .

Правило параллелограмма - если два неколлинеарных вектора и привести к общему началу, то вектор совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах и .Причем начало вектора совпадает с началом заданных векторов.

Вектор называется противоположным вектором к вектору , если он коллинеарен вектору , равен ему по длине, но направлен в противоположную сторону вектору .

Свойства сложения векторов:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - коммутативность
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - ассоциативность
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$
4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Разностью $\bar{a} - \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ такой, что выполняется условие: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$

Свойства умножения вектора на число:

1. $(\alpha \pm \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} \pm \beta\bar{a}$
2. $\alpha(\bar{a} \pm \bar{b}) = \alpha\bar{a} \pm \alpha\bar{b}$
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a} = \beta(\alpha\bar{a})$
4. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$
5. $-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$
6. $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$

Здесь $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - произвольные векторы,α, β - произвольные числа.

Сумма двух векторов, заданных координатами

Пусть заданы $a = \{x_a; y_a\}$ и $в = \{x_в; y_в\}$ тогда вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $\{x_a + x_в; y_a + y_в\}$

Чтобы **найти сумму двух векторов**, заданных своими координатами, надо сложить их соответствующие координаты.

Пример: Заданы $\bar{a} = (-3; 5)$ и $\bar{b} = (0; -1)$. Найти координаты вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Решение. $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (-3; 5) + (0; -1) = (-3 + 0; 5 + (-1)) = (-3; 4)$

Чтобы **умножить вектор на число**, надо каждую координату этого вектора умножить на заданное <u>число</u>.

Пример: Вектор $\bar{a} = (3; -2)$. Найти координаты вектора $2\bar{a}$

Решение. $2\bar{a} = 2 \cdot (3; -2) = (2 \cdot 3; 2 \cdot (-2)) = (6; -4)$

Чтобы **найти координаты вектора**, заданного координатами начала и конца, надо от координат конца отнять соответствующие координаты начала.

Пример: Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(-4; 2)$, $B(1; -3)$

Решение. $\overline{AB} = (1 - (-4); -3 - 2) = (5; -5)$

Задание1. Выполнить задание.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и вектора $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{A_1C}$ Найдите среди них:

1) Коллинеарные
2) Сонаправленные
3) Противоположно направленные
4)Равные

2. Упростить выражение:
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

3. Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найти число k, если:
$\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N середины AB и A_1D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{MD}$ по $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$

5. Основанием пирамиды является параллелограмм ABCD. Точка O является вершиной пирамиды. Разложите вектор $\overrightarrow{OD}$ по $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Задание2. Ответить на контрольные вопросы:

1). Определение вектора
2). Определение коллинеарных векторов
3). Определение сонаправленных векторов
4) Определение противоположно направленных векторов
5) Определение равных векторов
6) Определение компланарных векторов

Литература: Атанасян Л. С. Геометрия 10-11кл., стр.84-94.

Практическая работа №8
Тема «Уравнение плоскости .Расстояния между двумя точками»

Цель: развитие практических навыков составления уравнений плоскости по различным условиям, развитие навыка нахождения расстояний между точками.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, карточки.

Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

Уравнение плоскости: Ах + Ву + Cz + D = 0.

Здесь чисела А, В, С не равны 0. Возьмѐм произвольную точку Mo(xo, yo, Zo), координаты которой удовлетворяют данному уравнению: Axo + Вуо + Czo + D = 0. Вычтем это равенство из общего уравнения: A(x — xo) + В(у — yo) + С (z — zo) = 0. Получили уравнение, равносильное исходному. Но из первой части доказательства видно, что это уравнение задаѐт плоскость, проходящую через Mo(xo,yo,zo) перпендикулярно вектору N = (А, В, С). Итак, уравнение Ах + Ву + Cz + D = 0 задаѐт плоскость. . Пример: Написать уравнение плоскости, проходящей через точку Мо(5, 0, — 1) перпендикулярно вектору N = (3, —2, 7). Решение. Так как вектор нормали известен, то записываем уравнение в виде: 3х — 2у + 7z + D = 0. Подберѐм D так, чтобы точка Мо(5, 0, —1) лежала на плоскости: 3 · 5 — 2 · 0 + 7(—1) + D = 0. Отсюда D = —8. Итак, получили уравнение: 3х — 2у + 7z — 8 = 0. Заметим, что можно и сразу записать уравнение в виде: 3(х — 5) — 2(у — 0) + 7(z + 1) = 0 и, после раскрытия скобок, получить то же самое. Расстояние между точками: |M1H1|=√(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2, где M1(x1, y1, z1) и H1(x2, y2, z2).

Задание1. Выполнить задания:

1.Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M(-5; 1; 1) и имеет нормальный вектор n={-4; 2; -1}.

2.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку D(3;-1;2) и параллельной векторам.

3.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M1(-4; -1; -3), M2(-1; 5; 2) параллельно вектору ={1; -1; -4}.

4.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1;2;3), B(1;3;5), C(2;0;4).

5.Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M(-2; 3; -2) перпендикулярно к двум плоскостям.

6.Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки M1(-3; 1; 2), M2(-3; 4; -5) перпендикулярно к плоскости.

7.Даны точки M(-4;7;0) и N(0;-1;2). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN.

8.Даны точки A(1,5;1;-2), B(2;2;-3) и C(2;0;-1). Найдите периметр треугольника ABC.

Задание 2. Ответить на контрольные вопросы.

1.Общее уравнение плоскости .

2. Особые случаи уравнения.

3. Расположение двух плоскостей в пространстве.

4. Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору.

5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

6.Формула расстояния между точками.

Литература: Атанасян Л. С. Геометрия 10-11 кл., стр. 107, 115-116.

Практическая работа №9,10
Тема: «Сечение куба, призмы, пирамиды».

Цель: освоить навыки построение сечений многогранника плоскостью, развить пространственное мышление.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, карточки.

Порядок выполнения работы:

Методические указания: Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем секущей плоскостью тетраэдра (призмы) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (призмы). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (призмы) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого является эти отрезки, называется сечением. Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многоугольника, после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

На ребрах AB, BD, CD тетраэдра ABCD отмечены точки M,N, P. Построить сечение тетраэдра плоскостью (MNP) . Решение. Построим сначала прямую, по которой плоскость (MNP) пересекается с плоскостью грани (ABC) (рис.1) . Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещѐ одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E, которая и будет второй общей точкой плоскостей (MNP) и (ABC). Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник MNPQ- искомое сечение. Обратите внимание на то, что на рисунке красные прямые принадлежат плоскости (BCD), а синие прямые плоскости (ABC). Прямая BC принадлежит обеим плоскостям.

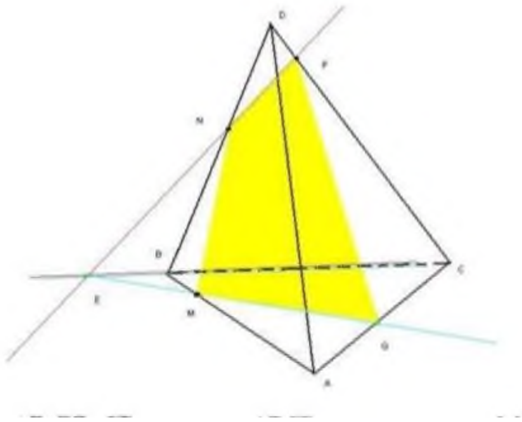


рис.1

Самостоятельная работа.

Задание 1. Выполнить задания.

1)Построить сечение пирамиды, параллельное основанию и делящее высоту пополам.

2)Построить сечение куба АВСД с ребром 5 см плоскостью, проходящей через точки и найти его площадь.

3) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L, M

Задание2. Ответить на вопросы:

1.Что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда?

2.Какие многоугольники могут получиться в сечении тетраэдра, параллелепипеда?

Литература: Атанасян,Л. С. Геометрия 10-11 кл., стр. 27-29.

Практическая работа № 11, 12

Тема: «Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции. Преобразование графиков функций»

Цели: научиться находить область определения и множество значений тригонометрических функций; научиться определять, является ли данная функция четной или нечетной; научиться строить график и с помощью графика описывать поведение функции при изменении аргумента; изучить свойства обратных тригонометрических функций. Изучить преобразования тригонометрических функций: сдвиг относительно Ох и Оу и растяжение относительно Оу.

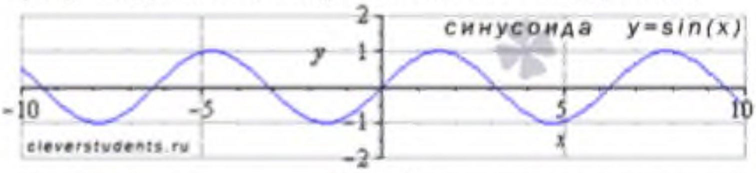
Оснащение занятия: учебник, конспект, таблицы.

Порядок выполнения работы. *Теоретические сведения*:

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Тригонометрическим функциям присуще понятие периодичности (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода , где Т - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт «наименьший положительный период». Функция y = sin(x). График функции синус называют "синусоида"

Функция y = sin(x).

График функции синус называют "синусоида"



Свойства функции y = sinx.

-Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция y = sinx определена при $x \in (-\infty; +\infty)$.

-Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T = 2\pi$.

-Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

-Функция синус принимает значения из интервала отминус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.

-Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

-Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \ k \in Z$, возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \ k \in Z$.

-Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right)$, локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), \ k \in Z$.

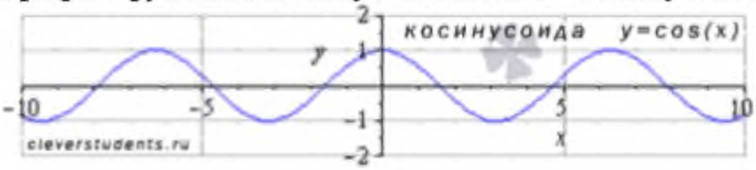
-Функция y = sinx вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \ k \in Z$, выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \ k \in Z$.

-Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \ k \in Z$.

-Асимптот нет.

Свойства функции y = cosx.

График функции косинус называют "косинусоида"



-Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$.

-Наименьший положительный период функции $y = cosx$ равен двум пи: $T = 2\pi$.

-Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

-Область значений функции косинус представляет интервал отминус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.

-Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$.

-Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \ k \in Z$, возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \ k \in Z$.

-Функция $y = cosx$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), \ k \in Z$, локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), \ k \in Z$.

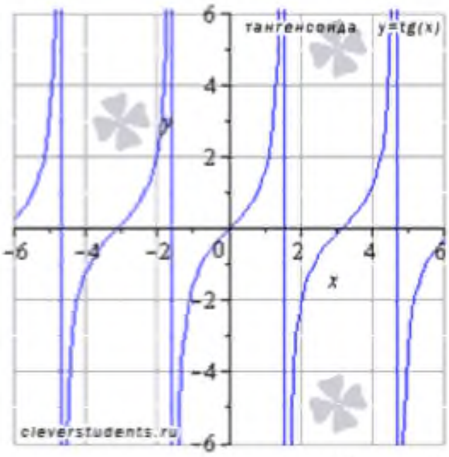
-Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \ k \in Z$, выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \ k \in Z$.

-Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0\right), \ k \in Z$.

-Асимптот нет.

Функция y = tg(x).

График функции тангенс называют "тангенсоида"



Свойства функции тангенс y = tgx.

-Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi \cdot k; \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k\right)$, где $k \in Z$, $Z-$ множество целых чисел.
Поведение функции y = tgx на границе области определения

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k+0} tg(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k-0} tg(x) = +\infty$

Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.

-Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.

-Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, $Z-$ множество целых чисел.

-Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.

-Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, $Z-$ множество целых чисел.

-Область значений функции y = tgx: $y \in (-\infty; +\infty)$.

-Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

-Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi \cdot k; \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k\right)$, $k \in Z$.

-Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2}+\pi \cdot k\right)$, $k \in Z$,

выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi \cdot k; \pi \cdot k\right]$, $k \in Z$.

-Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0)$, $k \in Z$.

Определение обратных тригонометрических функций.

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение y = sin x, при заданном , имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и x + 2πn (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, обратные тригонометрические функции многозначны. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Рассмотрим, например, синус: y = sin x. Если ограничить аргумент x интервалом , то на нем функция y = sin x монотонно возрастает. Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют арксинусом: x = arcsin y. Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями. Арксинус (y =

arcsin x) – это функция, обратная к синусу (x = sin y), имеющая область определения и множество значений . Арккосинус (y = arccos x) – это функция, обратная к косинусу (x = cos y), имеющая область определения и множество значений . Арктангенс (y = arctg x)– это функция, обратная к тангенсу (x = tg y), имеющая область определения и множество значений . Арккотангенс (y = arcctg x)– это функция, обратная к котангенсу (x = ctg y), имеющая область определения и множество значений . Графики обратных тригонометрических функций. Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой y = x. См. разделы Синус, косинус, Тангенс, котангенс.

Задание 1. Постройте графики с помощью преобразований.

1) $y = \cos x - 1$;

2) $y = \frac{1}{2}\sin x$;

3) $y = |2\cos x|$;

4) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = \text{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Задание2. Выполните задания. №11(3), №12(1,2), №16(1,2,3), №17(1,2,3), №22(1,2), стр.94-96 (А.Н.Колмогоров)

Задание3.Контрольные вопросы.

1. Какие функции называются тригонометрическими? Какова их область определения и множество значений?

2. Какие тригонометрические функции являются четными, а какие нечетные?

3. Что называется периодом функции? Какие периоды имеют тригонометрические функции?

4. Как построить графики тригонометрических функций?

5.Сформулируйте определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа. Для каких чисел они определены?

Литература: А.Н.Колмогоров, Алгебра и начала анализа 10-11 кл.,стр 14-15, 31-36, 40-46, 56-60, 64-66.

Практическая работа № 13, 14
Тема: «Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств»

Цели: научиться решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник.
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:
Решение простейших тригонометрических уравнений
Таблица1 .

Уравнение	*Общее решение*	*Частные случаи*		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=\pm\arccos a + 2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arctg} a + \pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arcctg} a + \pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

Задание 1. Решите уравнения: №136(в,г), №137(в,г), №138(в,г), №139(в,г), №140(в,б), №141(в,б).

Задание 2. Решите неравенства:№151(в,г), №152(в,г), №153(в,г), №154(в,г), №155(в,г), №156(в,г), №157(в,г), №158(б,в,г).

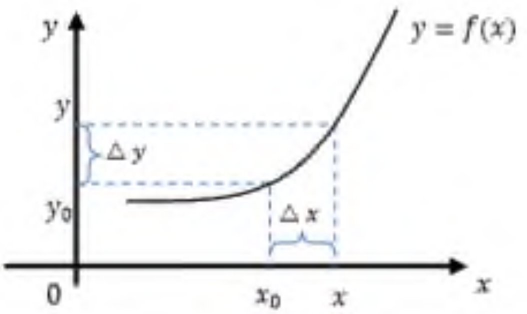
Задание 3. Ответьте на вопросы:
1. Какие тригонометрические уравнения называются простейшими?
2.Что понимают под решением тригонометрического уравнения?
3. По каким формулам находятся решения простейших тригонометрических уравнений?
4.Какие тригонометрические неравенства называются простейшими?
5.Что нужно учитывать при получении всех решений неравенства?

Литература: А.Н.Колмогоров, Алгебра и начала анализа 10-11 кл.,стр. 69-74, 75-80.

Практическая работа № 15
Тема: «Понятие производной функции. Производная степенной функции»

Цели: научиться находить производную степенной функции.
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник.
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:
Определение производной.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения аргумента $x0$ и x. Разность $x - x0 = \triangle x$ называется <u>*приращением аргумента*</u> x в точке $x0$. Разность $y - y0 = \triangle y$ называется <u>*приращением функции*</u> $y = f(x)$ в (.) $x0$. $\triangle y = f(x) - f(x0) = f(x0 + \triangle x) - f(x0)$.



<u>**Определение**</u>: Производной функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x0}$ называется предел отношения приращения функции $\triangle y$ в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента $\triangle x$ при произвольном стремлении $\triangle x$ к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = y'_x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке $x0$ называется дифференцируемой в этой точке.

Теорема: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x0$, то она в этой точке непрерывна.

Замечание: Обратная теорема неверна (существуют непрерывные функции, но в некоторых точках не имеют производной) $y = |x|$, $y = \sqrt{x}\ 3$ – в точке $x = 0$ не имеют производной.

Основные правила дифференцирования сформулированы в следующих теоремах:

Теорема 1: Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке $x0$, то в этой точке дифференцируема и их сумма, причём производная суммы равна сумме производных слагаемых: $\boldsymbol{(u + v)' = u' + v'}$.

Замечание: Аналогично для разности; теорема обобщается на любое число слагаемых.

Теорема 2: Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке $x0$, то в той же точке дифференцируемо и их произведение. При этом производная произведения находится по следующей формуле: $\boldsymbol{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

Следствие: $\boldsymbol{(c \cdot u)' = c \cdot u'}$.

Теорема 3: Если в данной точке функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы и $v \neq 0$, то в этой точке дифференцируемо их произведение uv и их частное u/v, причём:

$\boldsymbol{(u/v)' = (u'v - uv')/v^2}$

1) Производная постоянной.

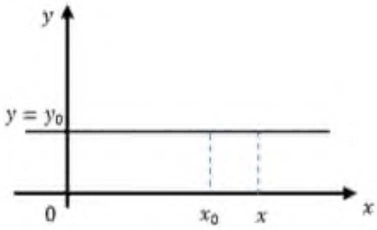


Рис. 10.1.

$y = c$

$\triangle x = x_0 - x$ – приращение аргумента

$\triangle y = y_0 - y$ – приращение функции

$$c' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0}{\triangle x} = 0$$

$\|c' = 0\|$

2) Производная степенной функции $y' = x^n$ с натуральным показателем (с любым).

$\triangle x$ – приращение аргумента, $\triangle y$ – приращение функции.

$y + \triangle y = (x + \triangle x)^n$; $\triangle y = (x + \triangle x)^n - y = (x + \triangle x)^n - x^n$

По биному Ньютона:

$$\triangle y = x^{n-1} \cdot \triangle x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot (\triangle x)^2 + \ldots + (\triangle x)^n - x^n =$$

$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot (\triangle x)^2 + \ldots + (\triangle x)^n;$$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\triangle x} = n \cdot x^{n-1};$$

$\|(x^n)' = n \cdot x^{n-1}\|$;

$(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$

3) **Производная тригонометрических функций.**

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x$ $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$

Задание 1. Найти производную функции: $y = \frac{7}{x^3}$

Решение:

$$y' = \left(\frac{7}{x^3}\right)' = (7x^{-3})' = -21x^{-4} = \frac{21}{x^4}$$

Задание 2. Найти производную функции: $y = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$

Решение:

$$y' = \left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{3}{4}\cdot\left(x\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{3}{4}\cdot\left(x^{\frac{3}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{3}{4}\cdot\left(x^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}\right)' = \frac{3}{4}\cdot\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

Задание 3. Найти производную функции: $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$

Решение:

$$y' = \left(\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{11}\cdot x^{\frac{11}{2}} + \frac{2}{15}\cdot x^{\frac{15}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}\cdot x^{\frac{7}{2}-1} - \frac{4}{11}\cdot\frac{11}{2}\cdot x^{\frac{11}{2}-1} + \frac{2}{15}\cdot\frac{15}{2}\cdot x^{\frac{15}{2}-1} = x^{\frac{5}{2}} - 2\cdot x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{13}{2}} =$$

$$= x^{\frac{5}{2}}(1 - 2x^2 + x^4) = \sqrt[2]{x^5}\cdot(x^2-1)^2 = x^2\sqrt{x}\cdot(x^2-1)^2$$

Найдите значение производной функции в точке x_0.

1) $f(x)=3x-1$, $x_0=\sqrt{7}$
2) $f(x)=x^2+3$, $x_0=4$
3) $f(x)=x^2/4 -5$, $x_0=-16$
4) $f(x)= -2/3x^2+3x-14$, $x_0=7$
5) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$.
6) $f(x)=-2/x +x/8+1,4$, $x_0=-4$
7) $f(x)= \frac{x^2+2x-1}{x+2}$, $x_0=-1,5$

Практическая работа № 16
Тема: «Геометрический и физический смысл производной»

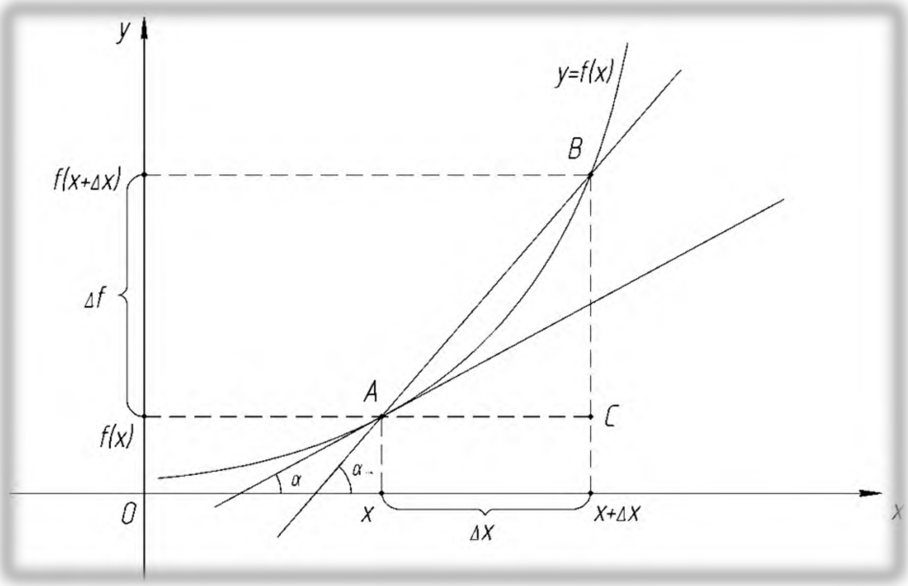
Цели: научиться составлять уравнение касательной, определять угловой коэффициент касательной, определять скорость изменения функции.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник.

Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

Прямая, проходящая через точку M_0 (x_0; $f(x_0)$), с отрезком которой почти сливается график функции f(x),называют *касательной* к графику в точке x_0 .

Рассмотрим график непрерывной функции и проведем в точке А секущую и касательную к графику



Прямая АВ – секущая, ее уравнение $y = k_{сек}x + b$, где $k_{сек}$ – угловой коэффициент секущей,

$k_{сек} = \Delta y/\Delta x = \text{tg}\ \alpha_{сек}$, где $\alpha_{сек}$ – угол наклона секущей (отсчитывается от положительного направления оси Ох против часовой стрелки).

Пусть Δx стремится к нулю, тогда секущая стремится к своему предельному положению – к касательной в точке А, т. е. угловой коэффициент касательной равен пределу углового коэффициента секущей: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \boldsymbol{k}_{сек} = k_{кас}$, причем $k_{кас} = \text{tg}\ \alpha$, где α - это угол наклона касательной, отсчитываемый от положительного направления оси Ох.

Значит, $\mathbf{k_{кас} = tg}\ \boldsymbol{\alpha} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

<u>Вывод.</u> Геометрический смысл производной заключается в том, что угловой коэффициент или тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке с абсциссой x равен производной функции в этой точке:

$$\mathbf{k_{кас} = tg}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}'(\boldsymbol{x})$$

Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 имеет вид
$\mathbf{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$

<u>Механическая задач</u><u>а</u>.

Итальянский ученый Г. Галилей, изучая свободное падение тел, экспериментальным путем определил зависимость пути S, пройденного телом за время t: $S = gt^2/2$, где g – ускорение свободного падения. При свободном падении скорость тела v растет, движение неравномерное. Как найти скорость тела в любой момент времени, т.е. мгновенную скорость v(t)? Мы знаем, что при равномерном движении v=S/t. При неравномерном движении по этой формуле находится средняя скорость на всем пути: $v_{ср}=\Delta S/\Delta t$. Рассмотрим два момента времени: t и $t+\Delta t$, причем Δt – малый промежуток времени. Тогда за этот промежуток времени тело пройдет путь $\Delta S=S(t+\Delta t) - S(t)$ и $v_{ср}=\Delta S/\Delta t$. Если $\Delta t \to 0$, то $v_{ср} \to v(t)$, значит. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{ср} = v(t)$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t)$

<u>Вывод.</u> Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость – это производная пути по времени:

$$\mathbf{v = S'(t)}$$

Вспомним определение ускорения: $a = \Delta v/\Delta t$, но если $\Delta t \to 0$, то

$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Итак, задача механики о нахождении скорости тела в любой момент времени решена. Нужно только вычислить предел отношения приращения пути к приращению времени, если приращение времени стремится к нулю, т. е. найти производную пути.

Примеры с решениями

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 3)$ и образующей с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $y=kx+b$. Найдем угловой коэффициент прямой: $k=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Так как точка $(-2;\ 3)$ принадлежит данной прямой и $k=-1$, то $3=-1\cdot(-2)+b$, откуда $b=1$. Итак, $y=-x+1$ — искомое уравнение прямой.

2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-x$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. Сначала находим $f(2)=2^3-2=6$, далее $f'(x)=(x^3-x)'=3x^2-1$, $f'(2)=3\cdot 2^2-1=11$. По формуле (1) уравнение касательной $y=6+11(x-2)$, откуда $y=11x-16$.

3. Найти точки графика функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3\frac{1}{3}$, в которых касательная к нему параллельна прямой $y=2x$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен 2. Параллельные ей прямые имеют такой же угловой коэффициент. Абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ либо параллельна прямой $y=2x$, либо совпадает с ней, найдем из уравнения $f'(x)=2$, или $\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{1}{2}\cdot 2x=2$, откуда $x^2-x-2=0$, т. е. $x_1=-1$, $x_2=2$. Далее находим:

$$y_1=f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2+3\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=2{,}5;$$

$$y_2=f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\frac{1}{3}=\frac{8}{3}-2+3\frac{1}{3}=4.$$

Точка $(-1;\ 2{,}5)$ не лежит на прямой $y=2x$ (действительно, $2{,}5\neq 2\cdot(-1)$), поэтому касательная в этой точке параллельна прямой $y=2x$.

Точка $(2;\ 4)$ лежит на прямой $y=2x$ (действительно, $4=2\cdot 2$), поэтому касательная в этой точке — сама прямая $y=2x$. Таким образом, точка $(2;\ 4)$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $(-1;\ 2{,}5)$.

Задания для самостоятельного решения

Записать уравнение прямой, проходящей через точку (x_0; y_0) и образующей с осью Ox угол α (1—2).

1. $\boxed{4}$ $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. **2.** $\boxed{5}$ $\alpha = \mathrm{arctg}\, 3$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (3—5).

3. $\boxed{3}$ $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$.

4. $\boxed{4}$ $f(x) = \ln(2x+1)$, $x_0 = 0$.

5. $\boxed{5}$ $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox (6—8).

6. $\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$.

7. $\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{4x^4}$, $x_0 = 1$.

Практическая работа № 17, 18

Тема: «Применение производной при исследовании функции на монотонность и экстремумы»

Цели: научиться исследовать функцию с помощью производной на монотонность и экстремумы.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник

Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

11.1. Непрерывность и точки разрыва функции

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x0$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x - x0 = \triangle\ x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y - y0 = \Delta y$, т.е. если $\boldsymbol{lim}\ \boldsymbol{x}{\to}x0\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{lim}\ \boldsymbol{x}{\to}x0\ [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x0} + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x0})] = \boldsymbol{0}$.

Этому определению равносильно следующее:

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x0$, если при $\boldsymbol{x} \to x0$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т. е. если $\mathbf{lim}\ \boldsymbol{x}{\to}x0\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x0})$. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке $x0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку $x0$ (т. е. в самой точке $x0$ и вблизи этой точки);

2) функция должна иметь предел или одинаковые односторонние пределы:

$\lim x{\to}x0{-}0$

$f(x) = \lim x{\to}x0{+}0$

$f(x)$

3) предел или односторонние пределы должны быть равны значению функции $f(x0)$ в этой точке. Определение: Функция $f(x)$ называется разрывной в точке $x0$, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке $x0$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $f(x)$ в точке $x0$ называется конечным, или 1-го рода, если существуют конечные односторонние неравные пределы:

$\lim x{\to}x0{-}0$

$f(x) \neq \lim x{\to}x0{+}0$

$f(x)$

Все другие случаи разрыва функции называются разрывами 2-го рода; в частности, если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то и разрыв функции называется бесконечным.

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва $x0$ называется разность ее односторонних пределов $\lim x{\to}x0{-}0\ f(x) - \lim x{\to}x0{+}0\ f(x)$, если они различны. Если точка $x0$ является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом:

1) если граничная точка $x0$ входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции при $x \to x0$ изнутри ее области определения равен или не равен $f(x0)$; 2) если граничная точка $x0$ не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.

2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение.

Возрастание и убывание функции

Определение: Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке (a,b), если для любых $x1 < x2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x1) < f(x2)$ $(f(x1) > f(x2))$.

Промежутки, на которых функция возрастает (убывает), называется промежутками (интервалами) монотонности.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема хотя бы на интервале (a,b). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) в $[a,b]$, необходимо, чтобы выполнялось условие $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на интервале (a,b) и достаточно, чтобы выполнялось условие $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на интервале (a,b).

Практическое правило для нахождения промежутков монотонности функции: достаточно разбить область существования функции $y = f(x)$ на интервалы точками, в которых её производная $y' = f'(x)$ равна нулю или не существует, и определить её знак в каждом из этих интервалов (для чего достаточно вычислить значение производной в какой-либо одной точке каждого интервала, ибо внутри каждого интервала производная $y' = f'(x)$ сохраняет постоянной знак).

Экстремумы функции

Точка $x0$ называется точкой максимума (max) функции $y = f(x)$, если функция непрерывна в этой точке и можно указать такую $\delta -$ окрестность точки $x0$, что для всех $x \neq x0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x0) > f(x)$ (рис.11.1). Точка $x0$ называется точкой минимума (min) функции $y = f(x)$, если функция непрерывна в этой точке и можно указать такую $\delta -$ окрестность точки $x0$, что для всех $x \neq x0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x0) < f(x)$ (рис.11.2).

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

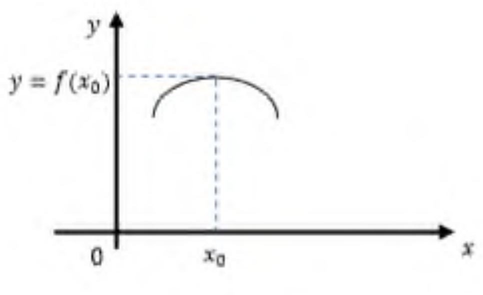


Рис.11.1

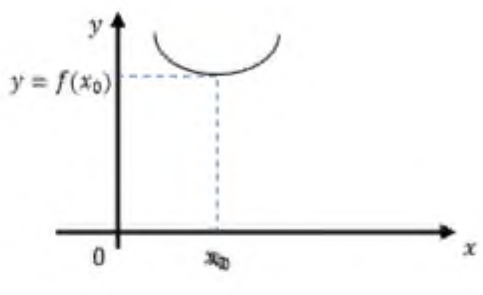


Рис.11.2

Необходимое условие существования точек экстремума функции − равенство нулю или несуществование первой производной функции в этих точках.

Такие точки называются критическими и они являются точками, подозрительными на экстремум.

Достаточные условия экстремума:

1. Если при переходе через критическую точку $x0$ первая производная функции меняет знак (т.е. слева и справа от этой точки $y'(x)$ имеет разные знаки) и функция

непрерывна в этой точке, то в этой точке экстремум, причём эта точка максимума, если смена знака происходит с плюса на минус, и точка минимума, если смена знака происходит с минуса на плюс.

2. Если в критической точке $x0$ первая производная равна 0 ($y'(x0) = 0$) и существует вторая производная $y''(x0)$, то в этой точке минимум, если $f''(x0) > 0$, и максимум, если $y''(x0) < 0$.

Для практики отметим:

1) сначала определяются точки, подозрительные на экстремум, для этого находится первая производная функции и точки, в которых она равна нулю или не существует;

2) исследуется знак первой производной слева и справа от каждой из этих точек.

x	$(-\infty; x_1$	x_1	$(x_1; x_2$	x_2	$(x_2; x_3$	x_3	$(x_3; x_4$	x_5	$(x_5; x_6$	x_6	$(x_6; x_7)$	x_7	$(x_1; \infty)$
y'	+	0	-	0	+	0	+	∞	-	∞	+	∞	+
y	↑	max	↓	min	↑	нет экстр	↑	т. разр ф-ии	↓	min если для ф.т. непр	↑	нет экстр	↑

*Точки располагаются в первой строке в порядке возрастания.

Если экстремумы определяются по второй производной $y''(x)$, то вычисляется значение второй производной в критических точках (если она в них существует).

$f''(x_1) > 0$ $\quad y_{min} = f(x_{min})$ $\quad$ подставим x_{min}, x_{max}

$f''(x_2) < 0$ $\quad y_{max} = f(x_{max})$ $\quad$ в данную функцию

Экстремумы $(x_{min}; y_{min})$, $(x_{max}; y_{max})$

Задание 1. Показать, что элементарная функция $y = 2x2 - 1$ непрерывна во всей своей области определения.

Решение.

Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

Областью определения функции y является вся числовая ось. Далее, придадим аргументу x произвольное приращение Δx: и, подставив в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x + \Delta x$, найдем наращенное значение функции:

$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)2 - 1$.

Вычитая из этого наращенного значения функции ее первоначальное значение, найдем приращение функции:

$\Delta y = 2(x + \Delta x)2 - 1 - (2x2 - 1) = 4x\Delta x + 2\Delta x2$.

Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Тогда

lim $\Delta x \to 0$

$\Delta y = 0$ при любом значении x

Следовательно, согласно определению непрерывности, функция y будет непрерывна при любом значении x, т. е. во всей своей области определения.

Задание 2. Даны функции. Найти их точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f1(x) = 1/(x^2 - 4)$;

2) $f2(x) = |x - 3| / (x - 3)$

Решение. 1) Функция $f1(x) = 1$ $x2-4$ определена, т. е. может быть вычислена при всех значениях x, кроме $x = \pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty < x < -2, -2 < x < 2, 2 < x < +\infty$. Она не определена в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках x_1 и x_2 имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных ее точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа:

$a)$ $\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$,

так как при $x \to -2-0$ величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой:

$\lim_{x\to -2+0} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$

так как при $x \to -2+0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x = -2$ функция имеет бесконечный разрыв (рис.8.1.).

б) $\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$

так как при $x \to 2-0$ величина x^2-4 есть отрицательная бесконечно малая, а обратная ей величина есть отрицательная бесконечно большая:

$\lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$

так как при $x \to 2+0$ величина x^2-4 есть положительная бесконечно малая, а обратная ей величина есть положительная бесконечно большая.

Следовательно, и в точке $x = 2$ разрыв функции бесконечный (рис.8.1.).

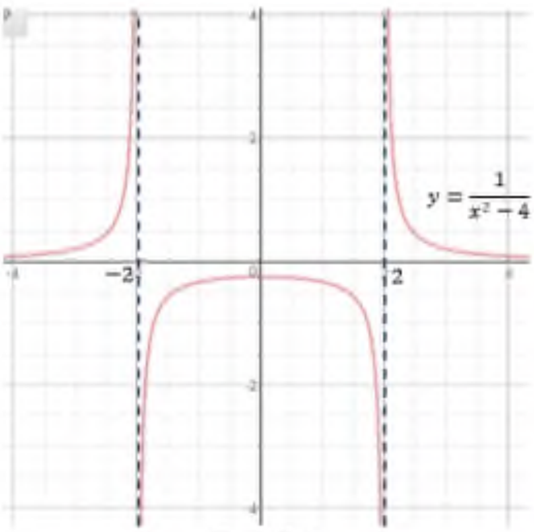


Рис .8.1.

Итак: в точках $x = -2$ и $x = 2$ функция терпит разрывы второго рода.

2) Функция $f_2(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Из этого следует, что в точке $x = 3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:

$\lim_{x\to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = -1$,

так как при всяком значении $x < 3$ эта функция равна -1.

$\lim_{x\to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$

так как при всяком значении $x > 3$ эта функция равна $+1$

Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет конечный разрыв (рис.8.2); ее скачок в этой точке разрыва конечный:

$$\lim_{x \to 3+0} f_2(x) - \lim_{x \to 3-0} f_2(x) = 1 - (-1) = 2.$$

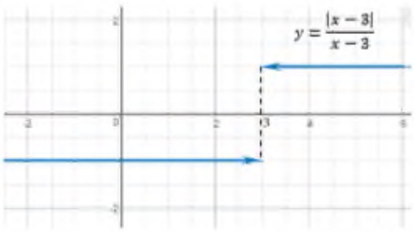


Рис.8.2.

Задание 3. Для каждой из следующих функций найти точки разрыва, если они существуют, найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \le 2 \\ x & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$2)\ \varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x & \text{при } 1 < x < 2{,}5 \\ 2x - 7 & \text{при } 2{,}5 \le x < +\infty \end{cases}$$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{при } -\infty < x \le -1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \le x < -\infty \end{cases}$$

Решение.

1) 1) Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \le 2 \\ x & \text{при } x > 2 \end{cases}$ с определена на всей числовой оси.

Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x = 2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x = 2$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2$$

так как слева от точки $x = 2$ функция $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = 2,$$

так как справа от точки $x = 2$ функция $f\ (x) = x$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому вследствие невыполнения второго условия непрерывности, в точке $x = 2$ функция имеет конечный разрыв первого рода. В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок (рис.8.3):

$\lim x{\to}2{+}0 f(x) - \lim x{\to}2{-}0\ f(x) = 2 - (-2) = 4$

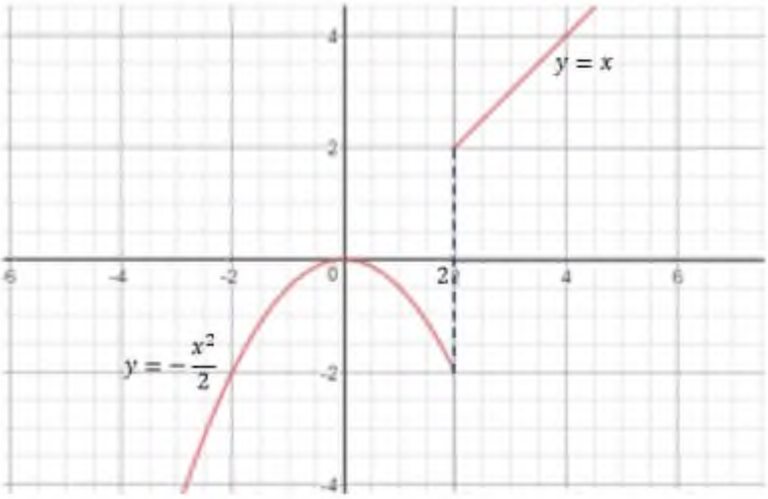


Рис.8.3

$$2)\ \varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x & \text{при } 1 < x < 2{,}5 \\ 2x - 7 & \text{при } 2{,}5 \le x < +\infty \end{cases}$$

Неэлементарная функция $f(x)$ определена для всех значений $x > 0$. Она может иметь разрыв в точках $x = 1$ и $x = 2{,}5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $y(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем точки $x = 1$ и $x = 2{,}5$:

$$a)\ \lim_{x\to 1-0} \varphi(x) = \lim_{x\to 1-0} 2\sqrt{x} = 2; \quad \lim_{x\to 1+0} \varphi(x) = \lim_{x\to 1+0} (4 - 2x) = 2$$

Согласно условию, значение функции $\varphi(x)$ в точке $x = 1$ определяется первой формулой:

$$\varphi(1) = 2\sqrt{1} = 2.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x = 1$ и

$$\lim_{x\to 1-0} \varphi(x) = \lim_{x\to 1+0} \varphi(x) = \varphi(1).$$

Поэтому в точке $x = 1$ функция $\varphi(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x \to 2,5-0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 2,5-0} (4 - 2x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 2,5+0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 2,5-0} (2x - 7) = -2$.

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т. е. не выполняется 2- е условие непрерывности. Поэтому в точке $x = 2,5$ функция имеет разрыв (конечный).

$\lim\limits_{x \to 2,5+0} \varphi(x) - \lim\limits_{x \to 2,5-0} \varphi(x) = -2 - (-1) = -1$.

Скачок функции в точке разрыва конечный:

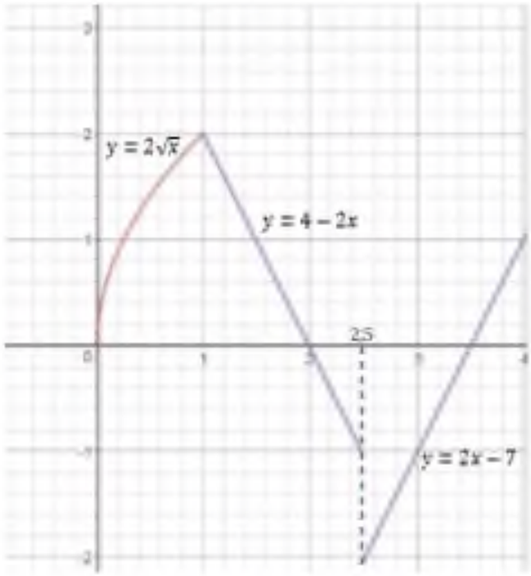


Рис.8.4.

Решить задачи

Найти интервалы возрастания и убывания функции (2

2. $\boxed{2}$ $y = 3x - 1$.

3. $\boxed{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

4. $\boxed{3}$ $y = 2x^2 - 5x$.

5. $\boxed{4}$ $y = x^3 - \frac{x^2}{2}$.

6. $\boxed{4}$ $y = -x^3 + 3x^2$.

7. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 6x$.

8. $\boxed{4}$ $y = x^4 - 18x^2$.

9. $\boxed{4}$ $y = x^4 + 4x$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$ (рис. 53, *а*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис. 53, *б*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x = x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Примеры с решениями

1. Найти критические точки функции $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 58. Выявить среди них точки экстремума.

Решение. В точке x_0 производная не определена, в точке x_1 производная существует и отлична от нуля; в точках x_2, x_3, x_4 и x_5 производная не существует; в точках x_6 и x_7 производная равна нулю. Таким образом, критическими являются точки x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7 (среди них стационарными являются точки x_6 и x_7). Производная меняет свой знак при переходе через точки x_4, x_5 и x_6 — они являются точками экстремума (x_4 и x_6 — точки максимума, x_5 — точка минимума).

2. Найти стационарные точки функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

Решение. Стационарные точки функции $f(x)$ — это корни уравнения $f'(x)=0$. Находим $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3(x^4-1)}{x^2}$.

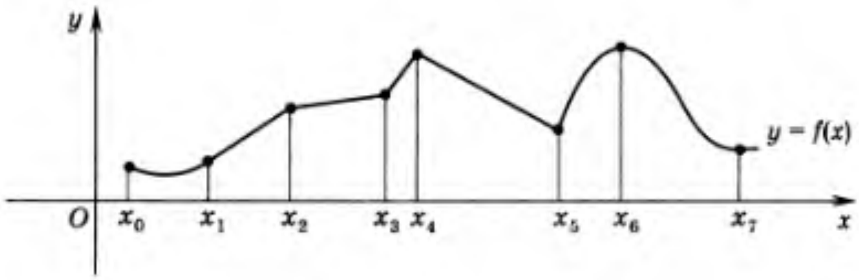


Рис. 58

Найти точки экстремума функции, определить их вид

$y=5x-2$. $\quad y=x^3-9x$.

$y=x^3+6x^2$. $\quad y=3x^4-4x^3-12x^2+19$.

Практическая работа № 19
Тема: «Виды призм и пирамид»

Цели: познакомиться с многогранниками, их видами, элементами
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем секущей плоскостью тетраэдра (призмы) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (призмы). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (призмы) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого является эти отрезки, называется сечением. Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многоугольника, после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани

На ребрах AB, BD, CD тетраэдра ABCD отмечены точки M,N, P. Построить сечение тетраэдра плоскостью (MNP) .

Решение. Построим сначала прямую, по которой плоскость (MNP) пересекается с плоскостью грани (ABC). Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещѐ одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E, которая и будет второй общей точкой плоскостей (MNP) и (ABC). Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник MNPQ- искомое сечение.

Обратите внимание на то, что на рисунке красные прямые принадлежат плоскости (BCD), а синие прямые плоскости (ABC). Прямая BC принадлежит обеим плоскостям.

Самостоятельная работа.

Задание 1. Выполнить задания.

1)Построить сечение пирамиды, параллельное основанию и делящее высоту пополам.

2)Построить сечение куба АВСД с ребром 5 см плоскостью, проходящей через точки и найти его площадь.

3) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L, M

4) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L, M

Задание2.Ответить на вопросы:

1.Что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда?

2.Какие многоугольники могут получиться в сечении тетраэдра, параллелепипеда?

Литература: Атанасян,Л. С. Геометрия 10-11 кл., стр. 27-29.

Практическая работа № 20
Тема: «Вычисление элементов пространственных фигур»

Цели: познакомиться с многогранниками, их видами, элементами
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы:
Теоретические сведения:

В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырёх треугольников, параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов. Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства. Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников.

На рисунке 71 изображён ещё один многогранник — октаэдр. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями1. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, а и 71), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 70, б). Стороны граней называются рёбрами, а концы рёбер — вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется секущей плоскостью, а общая часть многогранника и секущей плоскости — сечением многогранника. Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости.

Рассмотрим два равных многоугольника A1A2 ... Aп и B1B2 ... Bп, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A1B1, A2B2, ..., AпBп, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из п четырёхугольников

A 1A2B2B1, A2A3B3B2, ..., AnA1B1Bп (1) является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырёхугольнике A1A2B2B1 стороны A1B1 и A2B2 параллельны по условию, а стороны A1A2 и B1B2 — по свойству параллельных плоскостей, пересечённых третьей плоскостью (п. 11). Многогранник, составленный из двух равных многоугольников A1A2 ... Aп и B1B2 ... Bп, расположенных в параллельных плоскостях, и п параллелограммов (1), называется призмой (см. рис. 76). Многоугольники A1A2 ... Aп и B1B2 ... Bп называются основаниями, а параллелограммы (1) — боковыми гранями призмы. Отрезки A1B1, A2B2, ..., AпBп называются боковыми рёбрами призмы. Эти рёбра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Призму с основаниями A1A2 ... Aп и B1B2 ... Bп обозначают A1A2 ... AnB1B2 ... Bn и называют n-угольной призмой. На рисунке 77 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 70, б — четырёхугольная призма, являющаяся параллелепипедом. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае — наклонной. Высота прямой призмы равна её боковому ребру. Прямая призма называется правильной , если её основания — правильные много угольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.

Рассмотрим многоугольник A1A2 ... Aп и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 80): PA1A2, PA2A3, ..., PAnA1. (1) Многогранник, составленный из nугольника A1A2 ... Aп и n треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник A1A2 ... Aп называется основанием, а треугольники (1) — боковыми гранями пирамиды. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA1, PA2, ..., PAп — её боковыми рёбрами. Пирамиду с основанием A1A2 ... Aп и вершиной P обозначают так: PA1A2 ... Aп — и называют п-угольной пирамидой. На рисунке 81 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр. Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На рисунке 80 отрезок PH является высотой пирамиды. Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды — сумма площадей её боковых граней. Очевидно, Sполн = Sбок + Sосн1

Пример. Основанием пирамиды является квадрат ABCD со стороной 4 см, высота – отрезок . найти площадь боковой поверхности пирамиды. Решение.

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1 MA⊥ABC. Прямоугольные треугольники MAB и MAD равны по двум катетам, отсюда . Треугольники MCD и MCB равны по трем сторонам. Отсюда: AD – проекция прямой MD на плоскость ABC, AD⊥DC⇒MD⊥DC, отсюда имеем прямоугольный треугольник MDC. В прямоугольном треугольнике MAD найдем по теореме Пифагора гипотенузу. Найдем площадь рассматриваемого прямоугольного треугольника: Рассмотрим прямоугольный треугольник MDC и найдем его площадь:

Практическая работа № 21
Тема: «Изображение тел вращения на плоскости»

Цели: познакомиться с телами вращения, их видами, элементами
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

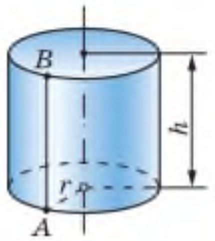
Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется цилиндрической поверхностью, а сами прямые — образующими цилиндрической поверхности. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, называется осью цилиндрической поверхности. Поскольку все образ ующие и ось перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны друг другу (см. п. 16). Рассмотрим теперь плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 100). Отрезки образующих, заключённые между плоскостями α и β, параллельны и равны друг другу (см. п. 11). По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же, расположенные в плоскости β, заполняют окруж

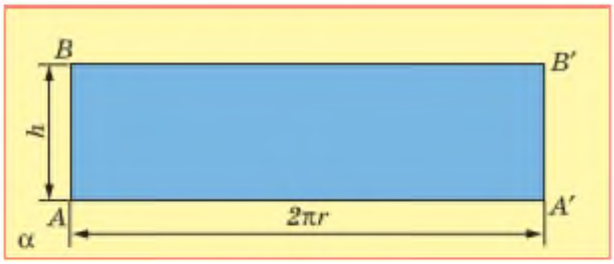
Цилиндр ность L1 с центром O1 радиуса r, где O1 — точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности. В самом деле, рассмотрим, например, отрезок MM1 образующей (см. рис. 100). Так как OO1 ⊥ OM, MM1 ⊥ OM и OO1 = MM1, то четырёхугольник OMM1O1 — прямоугольник, поэтому O1M1 = OM = r, а это означает, что точка M1 лежит на окружности L1 с центром O1 радиуса r. Очевидно, верно и обратное: любая точка M1 окружности L1 является концом отрезка MM1 образующей, проходящей через точку M окружности L и перпендикулярной к плоскости α. Таким образом, цилиндрическая поверхность пересекается с плоскостью β по окружности L1. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L1, называется цилиндром (см. рис. 100). Круги называются основаниями цилиндра, отрезки образующих, заключённые между основаниями, — образ ующими цилиндра, а образованная ими часть цилиндрической поверхности — боковой поверхностью цилиндра. Ось цилиндрической поверхности называется осью цилиндра.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется высотой цилиндра, а радиус основания — радиусом цилиндра. Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 101 изображён цилиндр, полученный вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания — вращением сторон BC и AD.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник (рис. 102), две стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется осевым. Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом. В самом деле, такая секущая плоскость (плоскость γ на рисунке 103) отсекает от данного цилиндра тело, также являющееся цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.

за площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки.





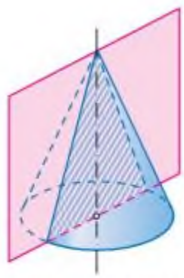
Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную к плоскости α этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведём прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической поверхностью (рис. 106), а сами прямые — образующими конической поверхности. Точка P называется вершиной, а прямая OP — осью конической поверхности. Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется конусом (рис. 107).

Круг называется основанием конуса, вершина конической поверхности — вершиной конуса, отрезки образующих, заключённые между вершиной и основанием, — образующими конуса, а образованная ими часть конической поверхности — боковой поверхн остью конуса. Ось конической поверхности называется осью конуса, а её отрезок, заключённый между вершиной и основанием, — высотой конуса. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (обоснуйте это).

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке 108 изображён конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC, а основание — вращением катета BC

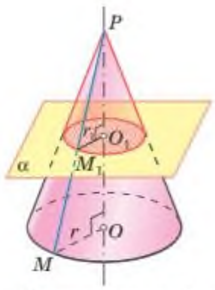
Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB

Рис. 108

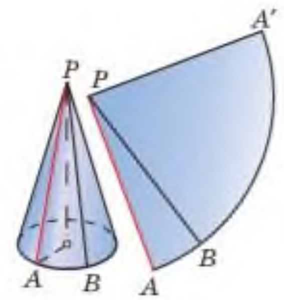


Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник

Рис. 109



Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к его оси, — круг с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$



а) б)

Развёртка боковой поверхности конуса

Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих (рис. 111, а, б). Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (см. рис. 111, б), радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

Практическая работа № 22
Тема: «Примеры симметрий в профессии»

Цели: познакомиться с телами вращения, их видами, элементами
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

В курсе планиметрии мы познакомились с движениями плоскости, т. е. отображениями плоскости на себя, сохраняющими расстояния между точками. Введём теперь понятие движения пространства. Предварительно разъясним, что понимается под словами отображение пространства на себя. Допустим, что каждой точке M пространства поставлена в соответствие некоторая точка M1, причём любая точка M1 пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке M. Тогда говорят, что задано отображение пространства на себя. Говорят также, что при данном отображении точка M переходит (отображается) в точку M1.

Под движением пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в какие-то точки A1 и B1 так, что A1B1 = AB. Иными словами, движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками.

Примером движения может служить центральная симметрия — отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M1 относительно данного центра O. Докажем, что центральная симметрия является движением. Обозначим буквой O центр симметрии и введём прямоугольную систему координат Oxyz с началом в точке O. Установим связь между координатами двух точек M (x; y; z) и M1 (x1; y1; z1), симметричных относительно точки O. Если точка M не совпадает с центром O, то O — середина отрезка MM1. По формулам координат середины отрезка xx + =1 2 0, yy + =1 2 0, zz + =1 2 0, откуда x1 = −x, y1 = −y, z1 = −z. Эти формулы верны, если точки M и O совпадают (объясните почему).

Рассмотрим теперь две точки A (x1; y1; z1) и B (x2; y2; z2) и докажем, что расстояние между Осевой симметрией с осью a называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M1 относительно оси a. Докажем, что осевая симметрия является движением. Для этого введём прямоугольную систему координат Oxyz так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек M (x; y; z) и M1 (x1; y1; z1), симметричных относительно оси Oz. Если точка M не лежит на оси Oz, то ось Oz: 1) проходит через середину отрезка MM1 и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем x^x + =1 2, 0 и y^y + =1 20, откуда x_1 = −x, и y1 = −y.

Второе условие означает, что аппликаты точек M и M1 равны: z1 = z. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка M лежит на оси Oz (объясните почему). Рассмотрим теперь любые две точки A (x1; y1; z1) и B (x2; y2; z2) и докажем, что расстояние между симметричными им точками A1 и B1 равно AB. Точки A1 и B1 имеют координаты A1 (−x1; −y1; z1) и B1 (−x2; −y2; z2).

По формуле расстояния между двумя точками находим:

Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости α) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M1. Докажем, что зеркальная симметрия является движением. Для этого введём прямоугольную систему координат Oxyz так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек M (x; y; z) и M1 (x1; y1; z1), симметричных относительно плоскости Oxy. Если точка M не лежит в плоскости Oxy, то эта плоскость: 1) проходит через середину отрезка MM1 и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем z + 1= 2 0, откуда $z_1 = -1$.

Второе условие означает, что отрезок ММ1 параллелен оси Oz, и, следовательно, x1 = x, y1 = y.

Полученные формулы верны и в том случае, когда точка М лежит в плоскости Оху (объясните почему). Рассмотрим теперь две точки А (x1; y1; z1) и В (x2; y2; z2) и докажем, что расстояние между симметричными им точками А1 и В1 равно АВ. Точки А1 и В1 имеют координаты А1 (x1; y1; −z1) и В1 (x2; y2; −z2). По формуле расстояния между двумя точками находим:

Практическая работа № 23
Тема: «Решение задач. Многогранники и тела вращения»

Цели: познакомиться с многогранниками, их видами, элементами
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

Пример. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания – 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно его оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от оси до плоскости этого сечения. (См. Рис. 8.)

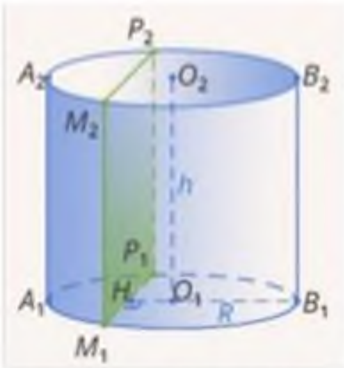


Рис. 8. Цилиндр, иллюстрирующий условие

Решение. Для начала поймем, что надо найти. Искомое расстояние – перпендикуляр из центра основания на хорду, отсекаемую в основании. Докажем это. Вопервых, данный отрезок перпендикулярен оси (а по определению расстояния, искомый отрезок должен быть перпендикулярен и оси, и плоскости сечения). Во-вторых, он перпендикулярен хорде и образующей, лежащим в плоскости сечения, а тогда, по признаку, он перпендикулярен всей плоскости. Итак, что найти – поняли. Очевидно, одна из сторон квадрата равна высоте, т. е. оси, а значит, и вторая равна ей же. Таким образом, сечение отсекает от основания хорду длиной 8 см.

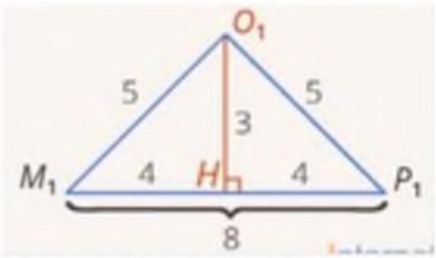


Рис. 9. Выносной рисунок фигуры в нижнем основании

Сделаем отдельный рисунок окружности нижнего основания.(См. Рис. 9.) Радиус окружности – 5, хорда длины – 8, нужно найти расстояние от радиуса до хорды. Очевидно, это просто высота равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основой 8. Найти ее несложно: она же является и медианой, значит, делит хорду на 4 и 4. Так что искомое расстояние равно 3 по теореме Пифагора (или из того, что треугольник египетский). Ответ: 3 см.

Пример. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади его основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания. Ответ дайте в градусах

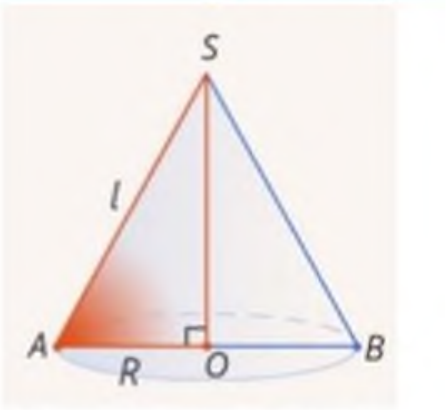


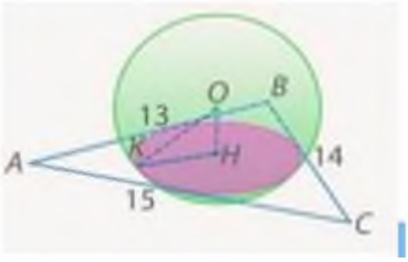
Рис. Иллюстрация к задаче

Ответ: 60 градусов.

Решение

Значит, Теперь рассмотрим осевое сечение, проведем высоту (ось). Получим прямоугольный треугольник, в котором катет (радиус основания) вдвое меньше гипотенузы, значит, угол при радиусе равен 60 градусам (см. рис.). .

Пример. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найти расстояние от



центра сферы до плоскости , если , ,

Рис. Иллюстрация к задаче

Решение

Зная радиус сферы, нужно найти расстояние от центра до плоскости. Для этого достаточно найти радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью. Тогда из прямоугольного треугольника (– центр сферы, – центр окружности сечения, – точка на этой окружности) мы сможем найти искомое расстояние. Найдем радиус окружности сечения. Она является вписанной для треугольника . Воспользуемся формулой: . Тогда ; – полупериметр. Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

треугольника ABC. Воспользуемся формулой: $S = pr$. Тогда $r = \frac{S}{p}$;

$p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см) – полупериметр.

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2).

Соответственно: $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$ (см).

Найдем расстояние от центра сферы до плоскости. Искомое расстояние – это катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом 4. Тогда легко показать, что .

Ответ: расстояние от центра сферы до плоскости равно 3 см

Практическая работа № 24, 25
Тема: «Преобразование иррациональных выражений»

Цели: научиться преобразовывать иррациональные выражения
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*:

Основываясь на данном определении, мы имеем, что $\sqrt{x-1}$, $3\sqrt{8}\cdot 6\sqrt{3}-1\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}$, $\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}\cdot(2+\sqrt{3})$, $5\sqrt{4\cdot a2d}:5\sqrt{d92\cdot a3}$ �-1, 83·36-12·3, 7-4·3·(2+3), 4·35 - это все выражения иррационального типа.

При рассмотрении выражения $x\cdot(x-\sqrt{7})\cdot(x+\sqrt{7})(x+32)\cdot(x-83)$ -7·+7+32·-83 получаем, что выражение является рациональным. К рациональным выражениям относят многочлены и алгебраические дроби. Иррациональные включают в себя работу с логарифмическими выражениями или подкоренными выражениями.

Основные виды преобразований иррациональных выражений

При вычислении таких выражений необходимо обратить внимание на ОДЗ. Часто они требуют дополнительных преобразований в виде раскрытия скобок, приведения подобных членов, группировок и так далее. Основа таких преобразований – действия с числами. Преобразования иррациональных выражений придерживаются строгого порядка.

Пример 1

Преобразовать выражение $9+3\sqrt{3}-2+4\cdot 3\sqrt{3}+1-2\cdot 3\sqrt{3}$9+33-2+4·33+1-2·33.

Решение

Необходимо выполнить замену числа 99 на выражение, содержащее корень. Тогда получаем, что

$\sqrt{81}+3\sqrt{3}-2+4\cdot 3\sqrt{3}+1-2\cdot 3\sqrt{3}==9+3\sqrt{3}-2+4\cdot 3\sqrt{3}+1-2\cdot 3\sqrt{3}$81+33-2+4·33+1-2·33==9+33-2+4·33+1-2·33

Полученное выражение имеет подобные слагаемые, поэтому выполним приведение и группировку. Получим

$9+3\sqrt{3}-2+4\cdot 3\sqrt{3}+1-2\cdot 3\sqrt{3}==(9-2+1)+(3\sqrt{3}+4\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{3})==8+3\cdot 3\sqrt{3}$9+33-2+4·33+1-2·33==9-2+1+33+4·33-2·33==8+3·33

Ответ: $9+3\sqrt{3}-2+4\cdot 3\sqrt{3}+1-2\cdot 3\sqrt{3}=8+3\cdot 3\sqrt{3}$9+33-2+4·33+1-2·33=8+3·33

Пример 2

Представить выражение $((5\sqrt{x+3})2-2\cdot 5\sqrt{x+3}+1)-9$+352-2·+35+1-9 в виде произведения двух иррациональных с использованием формул сокращенного умножения.

Решения

$((5\sqrt{x+3})2-2\cdot 5\sqrt{x+3}+1)-9==(5\sqrt{x+3}-1)2-9$+352-2·+35+1-9=35-12-9

Представляем 99 в виде 3232, причем применим формулу разности квадратов:

$(5\sqrt{x+3}-1)2-9=(5\sqrt{x+3}-1)2-32==(5\sqrt{x+3}-1-3)\cdot(5\sqrt{x+3}-1+3)==(5\sqrt{x+3}-4)\cdot(5\sqrt{x+3}+2)$+35-12-9=35-12-32==+35-1-3·35-1+3==+35-4·+35+2

Результат тождественных преобразований привел к произведению двух рациональных выражений, которые необходимо было найти.

Ответ: 36

Использование свойств корней

Свойства корней применяют для упрощения выражений. Чтобы применить свойство $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$=ab, где a≥0, b≥0 c≥0, d≥0, тогда из иррационального вида $1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$1+3·12 можно стать тождественно

равным 1+√3·12 1+3·12.Свойство n1√n2√...nk√a=n1·n2·,...,·nk √a...-2- ,
где a≥0,b≥0 говорит о том, что x2+√3√4√4 2+443 можно записать в форме x2+24√4 2+424.

Имеются некоторые нюансы при преобразовании подкоренных выражений. Если имеется выражение, то 4√−7−81=4√−7 4√−81-7-814=-74-814 записать не можем, так как формула n√ab=n√a n√b служит только для неотрицательного a>0 и положительного b. Если свойство применить правильно, тогда получится выражение вида 4√7 4√81 74814.

Для правильного преобразования используют преобразования иррациональных выражений с использованием свойств корней.

Внесение множителя под знак корня

Определение 3 Внести под знак корня – значит заменить выражение B·n√C a B и C являются некоторыми числами или выражениями, где n – натуральное число, которое больше 11, равным выражением, которое имеет вид n√Bn·C или −n√Bn·C-.

Если упростить выражение вида 2·3√x 2·3, то после внесения под корень, получаем, что 3√23·x 23·3. Такие преобразования возможны только после подробного изучения правил внесения множителя под знак корня.

Вынесение множителя из-под знака корня

Если имеется выражение вида n√Bn·C, тогда его приводят к виду B·n√C, где имеется нечетные n, которые принимают вид openB|·n√openC| с четными n, *B*>0, B и C являются некоторыми числами и выражениями.

То есть, если брать иррациональное выражение вида 3√23·x 23=3, вынести множитель из-под корня, тогда получим выражение 2·3√x 2·=3. Или √(x+1)2·7=+12·7 даст в результате выражение вида openx+1|·√7|=+1·7, которое имеет еще одну запись в виде openx+1|·√7+1·7.

Вынесение множителя из-под корня необходимо для упрощения выражения и его быстрого преобразования.

Преобразование дробей, содержащих корни

Иррациональное выражение может быть как натуральным числом, так и в виде дроби. Для преобразования дробных выражений большое внимание обращают на его знаменатель. Если взять дробь вида (2+3)·4√x 3√√x2+5(2+3)· 42+53, то числитель примет вид 5·4√x 5·=4, а, использовав свойства корней, получим, что знаменатель станет 6√x2+5=2+56=58. Исходную дробь можно будет записать в виде 5·4√x 6√x2+5 5·4=2.

Необходимо обратить внимание на то, что необходимо изменять знак только числителя или только знаменателя. Получим, что

−x+2·√x−3·x2+4√7=x+2·√x−(−3·x2+4√7)=x+2·√x 3·x2−4√7-2·3·2+74=5+2·3-(-3·2+74)= +2·3·2=74

Сокращение дроби чаще всего используется при упрощении. Получаем, что

3·(3√$\boxed{x+4}$−1)·√$\boxed{x}$(3√$\boxed{x+4}$−1)33·43-1=13 сокращаем на 3√$\boxed{x+4}$−1+43-1. Получим выражение 3·√$\boxed{x}$(3√$\boxed{x+4}$−1)23·=12.

Перед сокращением необходимо выполнять преобразования, которые упрощают выражение и дают возможность разложить на множители сложное выражение. Чаще всего применяют формулы сокращенного умножения.

Если взять дробь вида 2·x−y√$\boxed{x}$+√$\boxed{y}$2·, то необходимо вводить новые переменные u=√$\boxed{x}$ и v=√$\boxed{x}$, тогда заданное выражение поменяет вид и станет 2·u2−v2u+v2·. Числитель следует разложить на многочлены по формуле, тогда получим, что

Сокращение дробей или приведение подобных необходимо только на ОДЗ указанной дроби. При умножении числителя и знаменателя на иррациональное выражение получаем, что мы избавляемся от иррациональности в знаменателе.

Избавление от иррациональности в знаменателе

Когда выражение избавляется от корня в знаменателе путем преобразования, то это называется избавлением от иррациональности. Рассмотрим на примере дроби вида x3√$\boxed{3}$33. После избавления от иррациональности получаем новую дробь вида 3√$\boxed{9}$·x393·=3.

Переход от корней к степеням

Переходы от корней к степеням необходимы для быстрого преобразования иррациональных выражений. Если рассмотреть равенство n√$\boxed{am}$=amn видно, что его использование возможно, когда a является положительным числом, m –целым числом, a n – натуральным. Если рассматривать выражение 3√$\boxed{5-2}$5-23, то иначе имеем право записать его как 5−235-23. Эти выражения равнозначны.

Когда под корнем имеется отрицательное число или число с переменными, тогда формула n√$\boxed{am}$=amn не всегда применима. Если нужно заменить такие корни 5√$\boxed{(-8)3}$(-8)35 и 4√$\boxed{(-16)2}$(-16)24 степенями, тогда получаем, что (−8)35-835 и (−16)24-1624 по формуле n√$\boxed{am}$=amn не работаем с отрицательными a. для того, чтобы подробно разобрать тему подкоренных выражений и их упрощений, необходимо изучать статью о переходе от корней к степеням и обратно. Следует помнить о том, что формула n√$\boxed{am}$=amn применима не для всех выражений такого вида. Избавление от иррациональности способствует дальнейшему упрощению выражения, его преобразованию и решению.

1. Вычислить: 1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-2^{-4}\div 2^{-6}$; 2) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$;

3)* $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+10000^{0{,}25}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$.

2. Упростить выражение и вычислить его значение при указанных значениях переменной: 1) $\dfrac{2x^{-7}\cdot 3x^{5}}{6x^{-3}}$, x=12 ; 2) $\sqrt[3]{a}\div a^{\frac{1}{6}}$, a=64;

3)* $(x^{-1}-2y^{-3})^2+4x^{-1}y^{-3}$.

3. Сравнить числа: 1) $\left(\dfrac{13}{15}\right)^{7}$ и $\left(\dfrac{15}{17}\right)^{7}$; 2) $(1{,}14)^{-3}$ и $(0{,}14)^{-3}$.

Практическая работа № 26
Тема: «Решение иррациональных уравнений»

Цели: познакомиться с методами решения иррациональных уравнений
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

Иррациональным будем называть уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Рассмотрим некоторые способы решения иррациональных уравнений.

Решение иррациональных уравнений по определению арифметического корня натуральной степени:

$a \geq 0$, n|
$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0,\ a^{н} = b$

Например:
1) Решите уравнение:
$\sqrt{5-x} = 6$.
Решение: $5-x = 6^2$; ОДЗ: $5-x \geq 0$;
$x = 5-36$; $x \leq 5$.
$x = -31$.
Ответ: $x = -31$.
2) Решите уравнение: $\sqrt{2x-1} = -2$.
Решение: $2x-1 = -32$; $2x = -31$; $x = -15{,}5$. Ответ: $x = -15{,}5$.
3) Решите уравнение: $\sqrt{5-x} = -6$.
Решение: т.к. арифметическим корнем четной степени является неотрицательное число, то данное уравнение не имеет решений.

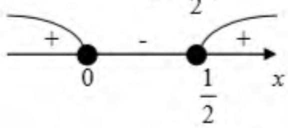
4) Решите уравнение: $\sqrt{2x^2-x} = 2-x$.

Решение: $2x^2 - x = 4 - 4x + x^2$;
$2x^2 - x - 4 + 4x - x^2 = 0$;
$x^2 + 3x - 4 = 0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

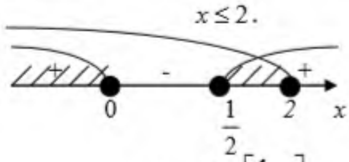
$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = -3 & x_1 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 & x_2 = 1. \end{array}$$

ОДЗ: $2x^2 - x \geq 0$;
$x(2x-1) = 0$;
$x = 0$ либо $2x - 1 = 0$;
$x = \frac{1}{2}$;



$(-\infty;0]$; $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

Доп. условие: $2 - x \geq 0$;
$x \leq 2$.



$(-\infty;0]$; $\left[\frac{1}{2};2\right]$

Ответ: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Задание: Решить уравнение

1) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$. 2) $\sqrt[3]{x^3 - 7} = 1$.

3) $\sqrt{1-x} = x + 1$. 4) $\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2$.

5) $5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = x^2 + 5x + 4$.

6) $\sqrt{\dfrac{x-5}{2x+37}} = \dfrac{1}{7}$.

Практическая работа № 27
Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

Цели: познакомиться с методами решения показательных уравнений и неравенств»
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное x входит только в показатели степени при некоторых постоянных основаниях.

Рассмотрим систематику показательных выражений и способы решения уравнений. Так как показательная функция $y=a^x$ монотонна и ее область значений $(0;\infty)$, то простейшее

Показательное уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень при $b > 0$. Именно к виду

$a^x = b$ надо сводить более сложные уравнения.

Простейшие уравнения

Пример 2 Решим уравнение $4^{x2+3x}=1/16$

Решение: Правую часть уравнения представим в виде степени числа 4 и получим: $4^{x+3x} = 4^{-2}$. Так как равны степени числа 4, то равны и показатели степеней. Имеем квадратное уравнение $x^2 + 3x = -2$ или $x^2 + 3x + 2 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$ являются и решениями данного уравнения.

Уравнения, решаемые их преобразованиями

Пример 3 Решим уравнение $5^{x+3}-3 \cdot 5^{x+1}-10 \cdot 5 = 4$.

Решение: Так как все слагаемые в левой части уравнения имеют вид 5^{x+a} (где a − некоторое число), то вынесем общий множитель 5^x за скобки.

Получаем: $5^x (5^3 -3 \cdot 5-10)$ или $5^x \cdot 100 = 4$. Разделим обе части уравнения на число 100 Имеем: $5^x =1/25$. Так как равны степени числа 5, то равны и показатели степеней. Тогда находим единственный корень данного уравнения $x = -2$.

Ответ: $x = -2$

Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной

Как и в уравнениях других видов, в случае показательных уравнений часто используется замена неизвестной.

Пример 7 Решим уравнение $3^{x+1} -8 = 3^{1-x}$.

Решение: Запишем данное уравнение в виде $3 \cdot 3^x -8 =3/3^x$ и введем новую неизвестную $t = 3^x > 0$. Получаем уравнение $3t -8 =3/t$

Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 3$ и $t_2 = -1/3$ (не подходит, так как $t > 0$). Получаем простейшее показательное уравнение $3^x = 3$, решение которого $x =1$.

Ответ: $x =1$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1.

1) $4^{x-1}=1$; 2) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 3) $0{,}3^{3x-2}=1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

5) $0{,}3^{5-2x}=0{,}09$; 6) $\left(2\sqrt[3]{4}\right)^{x}=8$.

Задание 2.

1) $27^{x}=\frac{1}{3}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=25$; 3) $400^{x}=\frac{1}{20}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}$;

5) $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{x}=\sqrt[3]{5}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-3x}=27$.

Задание 3.

1) $3\cdot 9^{x}=81$; 2) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 3) $0{,}6^{x}\cdot 0{,}6^{3}=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^{5}}$;

4) $2\cdot 4^{x}=64$; 5) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$;

7) $225\cdot 15^{2x+1}=1$; 8) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^{x}\right)^{x}=2^{2x+6}$.

Задание 4.

1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^{x}=28$; 3) $3^{x-2}-3^{x-3}=6$;

4) $2^{3x+2}+2^{3x-2}=30$; 5) $3^{x-1}-3^{x}+3^{x+1}=63$; 6) $4^{x-3}+4^{x}=65$.

Показательные неравенства

При решении простейших показательных неравенств $a^{f(x)} \vee b$ используется монотонность показательной функции: при $0 < a < 1$ функция убывающая, при $a > 1$ − возрастающая. Поэтому при рассмотрении показателей степеней в первом случае знак неравенства меняется на противоположный, во втором – сохраняется.

Пример 1 Решим неравенство $10^{2-14,5x} < 100$

Запишем неравенство в виде $10^{2-14,5x} < 10^2$. Так как основание 10 показательной функции

Больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $2 - 14,5x < 2$ или $-14,5x < 0$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (0;\infty)$.

Пример 2 Решим неравенство $(0,8)^{-3x+4} \geq (0,8)^{-2}$.

Так как основание 0,8 показательной функции меньше 1 (показательная функция убывающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака:

$-3x + 4 \leq -2$ или $-3x \leq -6$. Ответ: $x \geq 2$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $3^x > 9$; **2)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; **3)** $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$; **4)** $5^{x-1} \leq \sqrt{5}$;

5) $4^x < \frac{1}{2}$; **6)** $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$; **7)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}$; **8)** $3^{\frac{x}{2}} > 9$;

9) $3^{x^2-4} \geq 1$; **10)** $5^{2x^2-18} < 1$; **11)** $9^{2x} \leq \frac{1}{3}$; **12)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9} \leq 1$;

13) $\left(1\frac{3}{4}\right)^x < \frac{4}{7}$; **14)** $\left(\sqrt{3}\right)^{4-x^2} \geq 1$; **15)** $(0,1)^{x+1} \geq 100$; **16)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} < 125$.

Практическая работа № 28
Тема: «Логарифм числа. Свойства логарифмов. Операция логарифмирования»

Цели: познакомиться с логарифмом, его свойствами, основными приемами вычисления логарифмических выражений»

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник

Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

Что такое логарифм

Обычно определение логарифма дают очень сложно и запутанно. Мы постараемся сделать это просто и наглядно.

Для того, чтобы разобраться, что такое логарифм, давайте рассмотрим таблицу:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2	4	8	16	32	64	128

Все знакомы с тем, что такое степень числа . В таблице приведены различные степени числа 2. Глядя на таблицу, ясно, что, например, число 32 можно получить, возведя 2 в пятую степень, то есть это двойка, умноженная на саму себя пять раз.

25=2∗2∗2∗2∗2 5раз=32;25=$\underbrace{2*2*2*2*2}$ 5раз=32;

Теперь при помощи этой таблицы введем понятие логарифма.

Логарифм от числа 32 по основанию 2: $\log_2(32)=5$, т.к. $2^5=32$ – это в какую степень нужно возвести двойку, чтобы получить 32.
Из таблицы видно, что 2 нужно возвести в пятую степень. Значит наш логарифм равен 5:

Аналогично, глядя в таблицу получим, что:

$\log_2(4)=2$;;$\log_2(8)=3$;$\log_2(8)=3$;$\log_2(16)=4$; $\log_2(128)=7$.

Естественно, логарифм бывает не только по основанию 2, а по любым основаниям, больших 0 и не равных 1. Можете так же создавать таблицы для разных чисел. Но, конечно, со временем вы это будете делать в уме. Теперь дадим определение логарифма в общем виде:

Логарифмом от положительного числа (b>0) **с снованием a** (a>0; и a≠1) **называется степень** c, **в которую нужно возвести число** a, **чтобы получить** b.

$\log_a(b)=c$; где $a^c=b$

Будьте внимательны! В первое время обычно путают, что такое основание и то, что стоит под логарифмом (аргумент). Логарифм - это всегда функция, зависящая от двух переменных. Чтобы их не путать, помните определение логарифма – это **степень**, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить аргумент b.

Но, конечно, вы часто будете сталкиваться не с такими простыми логарифмами, как в примерах с двойкой, а очень часто с логарифмами, которые нельзя посчитать в уме. Действительно, что скажете про логарифм пяти по основанию два:

$\log_2(5)$=???

Как его посчитать? При помощи калькулятора. Он нам покажет, что такой логарифм равен иррациональному числу: $\log_2(5)=2,32192809…$

Или логарифм шести по основанию 4: $\log_4(6)=1.2924812…$ На уроках математики пользоваться калькулятором нельзя, поэтому на экзаменах и контрольных принято оставлять такие логарифмы в виде логарифма – не считая его, это не будет ошибкой!

Но иногда можно столкнуться с заданием, где нужно примерно оценить значение логарифма – это очень просто!

Как посчитать логарифм

Перед тем, как научиться считать логарифмы, нужно ввести несколько ограничений. Дело в том, что функция логарифма loga(b) существует только при положительных значениях основания a и аргумента b. И, кроме этого, на основание накладывается условие, что оно не должно быть равно 1.

loga(b) существуетсуществует при a>0;b>0;a≠1.

В дальнейшем при решении различных логарифмических уравнений и неравенств вам это пригодится для ОДЗ.

Обратите внимание, что само значение логарифма может быть любым. Это же степень, а степень может быть любой – отрицательной, рациональной, иррациональной и т.д.

$\log a(b) \in (-\infty;+\infty)$;Пример отрицательного логарфима:$\log_3(1/3)=\log 3(3^{-1})=-1$;

Теперь давайте разберем общий алгоритм вычисления логарифмов:

- Во-первых, постарайтесь представить основание и аргумент под логарифмом в виде степеней с одинаковым основанием. Параллельно с этим избавляемся от всех десятичных дробей – переводим их в обыкновенные.
- Разобраться, в какую степень x нужно возвести основание, чтобы получить аргумент. Когда у вас и там, и там степени с одинаковым основанием, посчитать значение логарифма становится проще.
- X и будет искомым значением логарифма.

Разберем на примерах.

Пример 1 *Посчитать логарифм от* 9 *по основанию* 3*:* $\log_3(9)=?$

- Сначала представим аргумент и основание в виде степеней тройки:$3=3^1, 9=3^2$; $\log_3(9)=\log_3(3^2)$;
- Теперь надо разобраться в какую степень x.
- Вот мы и решили:$\log 3(9)=2$..

Пример 2 *Вычислить логарифм от* 1/125 *по основанию* 5*:* $\log_5(1/125)=?$

- Представим аргумент и основание в виде степени пятерки:$5=5^1, 1/125=1/5^3=5^{-3}$;$\log_5(1/125)=\log_5(5^{-3})$;
- В какую степень x надо возвести $5^x=1/125$, чтобы Получили ответ:$\log_5(1/125)=-3$.

Пример 3 *Вычислить логарифм от* 4 *по основанию* 64*:* log64(4=?

- Представим аргумент и основание в виде степени двойки:$64=2^6, 4=2^2$;$\log_{64}(4)=\log_{26}(2^2)$;
- В какую степень x надо возвести 2^6, чтобы получить 2^2:$(2^6)^x=2^2, 2^{6*x}=2^2$, $6*x=2$, $x=2/6=1/3$.
- Получили ответ:$\log_{64}(4)=1/3$.

Пример 4 *Вычислить логарифм от* 1 *по основанию* 8*:* $\log_8(1)=?$

Представим аргумент и основание в виде степени двойки. Напоминаю, что любое число в нулевой степени равно единице:

$8=2^3$,$1=2^0$;$\log_8(1)=\log_{23}(2^0)$; Получили ответ:$\log_8(1)=0$.

Пример 5 *Вычислить логарифм от* 15 *по основанию* 5*:* $\log_5(15)=?$

Представим аргумент и основание в виде степени пятерки:$5=5^1, 15=5^?$ в виде степени пятерки не представляется, поэтому этот логарифм мы не можем посчитать. У него значение будет иррациональное. Оставляем так, как $\log_5(15)$

Внимание! Как понять, что некоторое число a не будет являться степенью другого числа b? Это довольно просто – нужно разложить a на простые множители. $16=2*2*2*2=2^4$, 16 разложили, как произведение четырех двоек, значит 16 будет степенью двойки. $48=6*8=3*2*2*2*2$,$48=6*8=3*2*2*2*2$,Разложив 48 на простые множители, видно, что у нас есть два множителя 2 и 3, значит 48 нельзя представить в виде степени какого-нибудь числа.

Свойства логарифмов

$$1.\ log_a(1) = 0;$$

$$2.\ log_a(a) = 1;$$

$$3.\ log_a(b * c) = log_a(b) + log_a(c);$$

$$4.\ log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c);$$

$$5.\ log_a(b^m) = m * log_a(b);$$

$$6.\ log_{a^m}(b) = \frac{1}{m} * log_a(b);$$

$$7.\ log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)},\ c > 0;\ c \neq 1;$$

$$8.\ log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)};$$

$$9.\ a^{log_a(b)} = b.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\log_{20} 2 + \log_{20} 10$.

2. Найдите значение выражения $5^{2\log_5 6}$.

3. Найдите значение выражения $\log_{0,5} 32$.

4. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 2$.

5. Найдите значение выражения $\log_2 640 - \log_2 5$.

6. Найдите значение выражения $\log_2 224 - \log_2 7$.

7. Найдите значение выражения $\log_4(\log_2 16)$.

8. Найдите значение выражения $4^{3\log_4 2}$.

9. Найдите значение выражения $\log_3 0,3 + \log_3 30$.

10.Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[8]{4}} 4$.

Практическая работа № 29
Тема: «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Цели: познакомиться с методами решения логарифмических уравнений и неравенств»

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник

Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

Логарифмические уравнения

1. *Простейшие логарифмические уравнения*

<u>Определение 1</u> Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма и (или) в основании логарифма.

Например, $\log_5 x = \log_{25} x + \lg 100$.

<u>Определение 2</u> Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида

$\log_a f(x) = b$

Например, $\log_2 x = 5$.

Простейшее логарифмическое уравнение решается потенцированием:

$f(x) = a^b$,

Пример 1 Решить уравнение $\log_2 x = 5$.

Решение. $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5$.

Ответ: x = 32

<u>Определение 2</u> Простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми основаниями логарифмов называется уравнение вида: $\log_a f(x) = \log_a F(x)$,

где a - заданное число.

Замечание. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a F(x)$ не является простейшим логарифмическим уравнением. Однако его можно привести к простейшему логарифмическому уравнению:

$$\log_a f(x) = \log_a F(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{F(x)} = 0, \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$$

Чтобы не делать каждый раз этого преобразования, мы в дальнейшем, Уравнение вида

$\log_a f(x) = \log_a F(x)$ будем называть простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми основаниями логарифмов. (Если говорить боле строго, такое уравнение следует называть обобщенным простейшим логарифмическим уравнением.)

Например, $\log_5 x = \log_5(x^2 + 2)$.

Если два логарифма с одинаковыми основаниями равны, то равны и выражения под знаком логарифма: $\log_a f(x) = \log_a F(x) \Leftrightarrow$ системе $f(x) = F(x)$, $f(x) > 0$, $F(x) > 0$,

Пример 2 Решить уравнение $\log_2 (x - 1) = \log_2 (x^2 - 2x + 1)$.

Решение. Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x - 1 = x^2 - 2x + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x-1)^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x_1 = 1,\ x_2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\log_2(x-3)=4$.
2. $\log_2\left(2^x-3\right)=2-x$.
3. $\log_3\left(3^{-x+1}+1\right)+2=x$.
4. $\lg\lg\lg x=0$.
5. $\log_5\left(-1+26\cdot5^{x-2}\right)=2x-2$.
6. $\lg2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$.
7. $\log_3\left(3^x+6\right)=3-x$.
8. $\log_5\left(3+5^{-x}\right)-x=2$.
9. $\log_{x+1}\left(x^3+4x^2+5x-2\right)=3$.
10. $\log_x(4x^2-3x)=3$.
11. $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$.
12. $\log_4(2-x)=\log_4 5$.

Практическая работа № 30
Тема: «Решение уравнений различных видов»

Цели: повторить методы решения, отработать навыки решения уравнений различных видов
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы:

1. Решить уравнение:

1) $x^2+6=5x.$ 2) $8(6+x)+2x=8.$

3) $(x-5)^2-x^2=0.$ 4) $\frac{1}{7x+16}=\frac{1}{8x+11}.$

5) $\frac{9}{x^2+5}=1.$

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x-10}=\frac{1}{16}.$
3. Найдите корень уравнения $\log_{17}(29-6x)=\log_{17}5.$
4. Найдите корень уравнения $\log_5(4+x)=2.$
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5}=49.$
6. Найдите корень уравнения $5^{x-6}=\frac{1}{125}.$
7. Найдите корень уравнения $\log_4(5x-6)=2$
8. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}$; 2) $\sqrt[4]{x^3+8}=2$

3) $\sqrt{x+11}=x-1.$ 4) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4.$

Практическая работа № 31
Тема: «Сложение и умножение вероятностей»

Цели: отработать навыки решения задач на вероятность по теоремам ТВ
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *теоретические сведения*

Пусть события A, B ⊂ Ω (Ω — пространство элементарных событий).

Суммой двух событий A и B называется событие A + B, состоящее в том, что в результате испытания произойдет хотя бы одно из этих событий.

Таким образом, если события A и B совместны, то их сумма A + B означает, что наступило или событие A, или событие B, или оба события вместе. Если события несовместны, то событие A + B заключается в том, что наступит или событие A, или событие B, так как совместное наступление событий невозможно.

Пример 1.. В урне находятся красные, белые и синие шары. Вынимается один шар. Пусть события: A = {вынули белый шар}, B = {вынули красный шар}.

Тогда событие A + B = {вынули не синий шар}.

Пример 2. Подбрасывается игральный кубик. Пусть события: A = {выпадение числа очков, кратного трем}, B = {выпадение числа очков, большего трех}. Тогда событие A + B = {выпадение числа очков, большего двух}.

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются диаграммы Эйлера — Венна

На этих диаграммах достоверное событие **Ω** изображается в виде некоторой области на плоскости, а случайному событию A будет соответствовать

некоторая геометрическая фигура внутри области **Ω**

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Если события в группе не являются совместными в совокупности, то их произведение будет событием невозможным. Из попарной совместности событий из группы не следует совместность в совокупности.

События A1, A2, …, An называются совместными в совокупности, если каждое из них и произведение остальных являются совместными событиями Переформулируем теперь понятие «полной группы событий».

События A1, A2, …, An в испытании G образуют полную группу событий, если они попарно несовместны (AiAj = ∅ при i ≠ j) и их сумма эквивалентна достоверному событию: A1 + A2 + … + An = **Ω**, т. е. в испытании одно из событий обязательно произойдет.

Любые два противоположных события образуют полную группу событий:

A(-A) =∅ и A+(- A) = Ω.

Для произведения событий справедливы соотношения:

AB = BA; (AB)C = A(BC); AA = A; AΩ = A; AA =∅; A∅ =∅.

С помощью теории вероятностей можно определять вероятность события по известным вероятностям других событий, если они связаны с первым. Для этого используются теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема 1. Если два события A и B являются несовместными, то вероятность появления их суммы A + B равна сумме вероятностей этих событий, т. е.P(A+ B) = P(A)+ P(B).

Пример 3. В урне 30 шаров: 5 синих, 10 белых и 15 красных. Найти вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шар.

Решение. Обозначим события: A = {извлечен синий шар}, B = {извлечен белый шар}, C = {извлечен красный шар}. Извлечение цветного шара означает извлечение либо синего, либо красного шара, т. е. сумму событий A + C. Найдем вероятность этих событий с помощью классического определения вероятностей. Имеем: P(A) = 5/30, P(C) = 15/30. Так как события A и C несовместны, то по формуле получаем: P(A+C)=P(A)+P(C)=5/30+15/30=20/30=2/3.

Пример 4 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок промахнется?

Решение. Пусть событие A = {стрелок попал в мишень}, P(A) = 0,7. Тогда

A = {стрелок промахнулся} и по формуле (1.13) имеем:

P(A) =1−P(A) =1−0,7 = 0,3.

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: P(A+B) = P(A) + P(B) −P(AB).

Пример 5. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность по двум параметрам. Установлено, что 10 из 100 деталей не проходят контроль только по первому параметру, 15 из 100 — только по второму, а 6 из 100 — и по первому, и по второму. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь нестандартна.

Решение. Рассмотрим события: A = {деталь не удовлетворяет стандарту по первому параметру}, B = {деталь не удовлетворяет стандарту по второму параметру}, C = {деталь нестандартна}. Тогда событие AB = {деталь не удовлетворяет стандарту по обоим параметрам}. Имеем: P(A) =10 /100 = 0,1; P(B) =15 /100 = 0,15; P(AB) = 6 /100 = 0,06.

Событие C происходит, когда происходит хотя бы одно из событий A и B, т. е. C = A + B. Тогда по формуле (1.14) имеем:

P(C) = P(A + B) = P(A)+ P(B)−P(AB) = 0,1+ 0,15− 0,06 = 0,19.

Теорема 1.4. Вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло, т. е.

P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).

Таким образом, P(A/B) =P(AB)/P(B)

Пример 6. .В урне 10 шаров с номерами от 1 до 10. Наудачу один за другим берут два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первый вынутый шар имеет номер 5, а второй шар — нечетный номер.

Решение. Пусть событие A = {первый вынутый шар имеет номер 5},

B = {второй вынутый шар имеет нечетный номер}. В задаче требуется найти P(AB). По формуле имеем: P(AB) = P(A)P(B/A)=1/10*4/9=2/45.

Задачи для самостоятельного решения:

1.1. Все натуральные числа от 1 до 40 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Найти вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 7

1.2. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найти вероятность того, что в сумме получится 10 очков.

1.3. В книге 300 страниц. Найти вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, содержащий цифру ноль.

1.4. Подбрасываются три симметричные монеты. Найти вероятность того, что все монеты упали одинаково.

1.5. На четырех одинаковых карточках написаны буквы У, Р, А, Л. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Найти вероятность того, что получится слово УРАЛ.

1.6. На четырех одинаковых карточках написаны буквы У, У, Ф, Р. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Найти вероятность того, что получится слово УРФУ.

1.7. На шести одинаковых карточках написаны все буквы слова ТОСТЕР. Карточки перемешиваются, наугад извлекаются 4 карточки и раскладываются в ряд. Найти вероятность того, что получится слово ТОСТ.

1.8. В урне 9 шаров, из которых 5 красных. Наудачу извлекают 4 шара. Найти вероятность того, что все извлеченные шары красные.

1.9. В урне 9 красных, 8 синих и 5 зеленых шаров. Наудачу извлекают 9 шаров. Найти вероятность того, что извлекли 3 красных, 3 синих и 3 зеленых шара.

Практическая работа № 32
Тема: «Вероятность в профессиональных задачах»

Цели: рассмотреть применение теории вероятностей в профессиональных задачах
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*

1. На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

2. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

3. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

6. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме "Ботаника". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Ботаника".

7. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

8. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

9. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

10. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

11. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

12. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

13. Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

14. В соревновании по биатлону участвуют спортсмены из 25 стран, одна из которых — Россия. Всего на старт вышло 60 участников, из которых 6 — из России. Порядок старта определяется жребием, стартуют спортсмены друг за другом. Какова вероятность того, что десятым стартовал спортсмен из России?

15. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Игорь Чаев. Какова вероятность того, что в первом туре Игорь Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

16. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

17. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

18. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

19. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

20. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Практическая работа № 33
Тема: «Решение задач на вероятность»

Цели: отработать навыки решения задач по теории вероятности
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы: *Теоретические сведения*
Решить задачи

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?
2. В ящике имеются 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных – 6 отличников.
4. Из партии втулок, изготовленных токарем за смену, случайным образом для контроля взяты 10 штук. Найти вероятность того, что среди них 2 втулки второго сорта, если в партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.
5. На 8 карточках написаны буквы А, Г, И, Л, М, О, Р, Т. После их перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, каком они вынуты. Найти вероятность того, что получим слово: а) «алгоритм»; б) «ритм».
6. Из букв разрезной азбуки составлено слово «математика». Карточки с отдельными

буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «математика».

7. На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.
8. Брошены три игральные кости. Найти вероятность события «на каждой из выпавших граней появится пять очков".
9. В ящике15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй – красным.
10. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5 Наудачу по одному извлекают шара без возвращений. Найти вероятности события: последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5.

11 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

12. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
13. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.
14. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы (за время t) равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать только два элемента.
15. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к сезону весна-лето, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной равна 30%, что чёрный – 60%, а вероятность того, что в моде будет красный цвет равна 40%. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что в моде весной будет преобладать только красный цвет.

Практическая работа № 34
Тема: «Работа с таблицами, графиками, диаграммами»

Цели: отработать функциональную грамотность на примере работы с информацией в виде таблиц, графиков и диаграмм.

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник

Порядок выполнения работы:

1 Диаграммы - это графический способ представления числовых данных, находящихся на листе, удобный для анализа и сравнения.

2 Данные, которые расположены в столбцах или строках, можно изобразить в виде гистограммы. Гистограммы используются для демонстрации изменений данных за определенный период времени или для иллюстрирования сравнения объектов. В гистограммах категории обычно формируются по горизонтальной оси, а значения — по вертикальной.

3 Данные, которые расположены в столбцах или строках, можно изобразить в виде графика. Графики позволяют изображать непрерывное изменение данных с течением времени в едином масштабе; таким образом, они идеально подходят для изображения трендов изменения данных с равными интервалами. На графиках категории данных

равномерно распределены вдоль горизонтальной оси, а значения равномерно распределены вдоль вертикальной оси.

4 Данные, которые расположены в одном столбце или строке, можно изобразить в виде круговой диаграммы. Круговая диаграмма демонстрирует размер элементов одного ряда данных пропорционально сумме элементов. Точки данных на круговой диаграмме выводятся в виде процентов от всего круга.

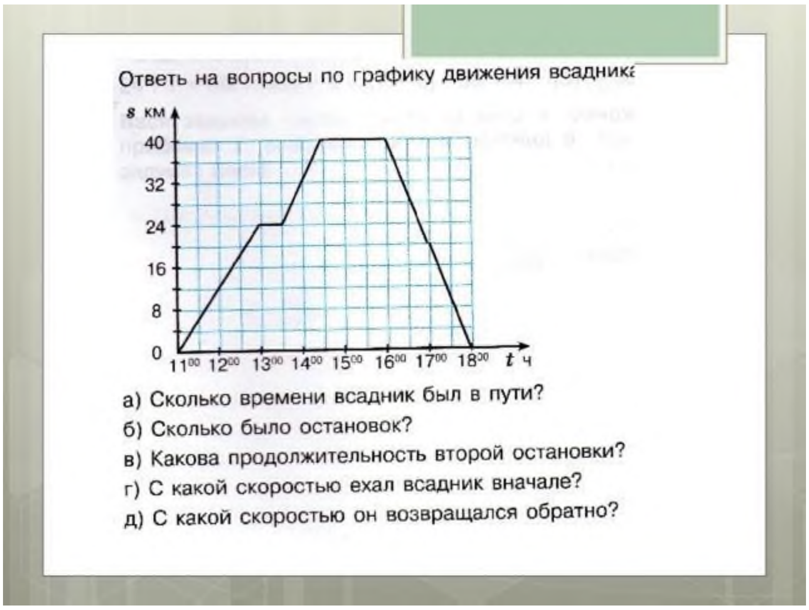
5 Данные, которые расположены в столбцах или строках, можно изобразить в виде линейчатой диаграммы. Линейчатые диаграммы иллюстрируют сравнение отдельных элементов. Линейчатые диаграммы рекомендуется использовать, если: – Метки осей имеют большую длину. – Выводимые значения представляют собой длительности.

6 Данные, которые расположены в столбцах или строках, можно изобразить в виде диаграммы с областями. Диаграммы с областями иллюстрируют величину изменений в зависимости от времени и могут использоваться для привлечения внимания к суммарному значению в соответствии с трендом. Отображая сумму значений рядов, такая диаграмма наглядно показывает вклад каждого ряда.

7 Перед тем, как строить диаграмму, надо внести нужные для отображения данные в таблицу. После того, как таблица подготовлена, следует определиться с типом диаграммы.

Ответить на вопросы по данным задачи:

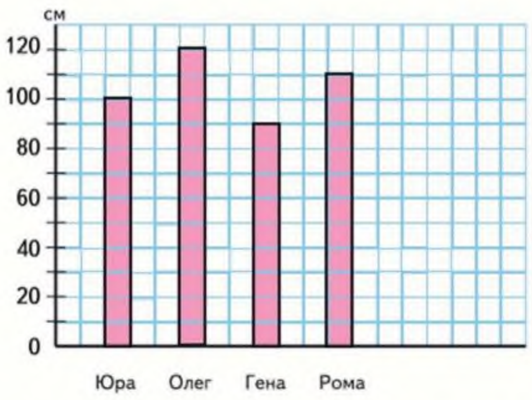
№ 1



№ 2

№3

83. На диаграмме показаны результаты прыжков в высоту четырёх мальчиков, которые заняли 4 первых места.



Используя данные, изображённые на диаграмме, ответь на вопросы.

1) Кто из мальчиков занял первое место?
2) Какую высоту удалось взять Роме? Юре?
3) На сколько сантиметров прыжок Олега был выше, чем прыжок Гены?

№ 4

1. В классе 20 учеников. С помощью круговой диаграммы выясните, сколько в классе мальчиков.

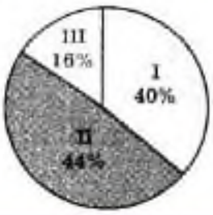
1) 5 мальчиков
2) 9 мальчиков
3) 10 мальчиков
4) другой ответ

2. Используя круговую диаграмму на рисунке, выясните, сколько процентов товара продано во второй день, если известно, что за два дня продано 200 кг товара.

1) 80%
2) 50%
3) 70%
4) другой ответ

3. На круговой диаграмме показано соотношение числа однокомнатных (I), двухкомнатных (II) и трёхкомнатных (III) квартир в 250-квартирном доме (в процентах). Других квартир нет. Сколько трёхкомнатных квартир в доме?

1) 40 квартир
2) 44 квартир
3) определить невозможно
4) другой ответ



№5

214. 1) Велосипедист проехал по дороге, идущей вниз, от своего дома до почты и затем вернулся домой. На рисунке 41 изображен график движения велосипедиста. Используя график, ответьте на вопросы:

а) За сколько времени проезжал велосипедист 1 км на спуске?

б) Какова была скорость велосипедиста (в км/ч) на подъеме?

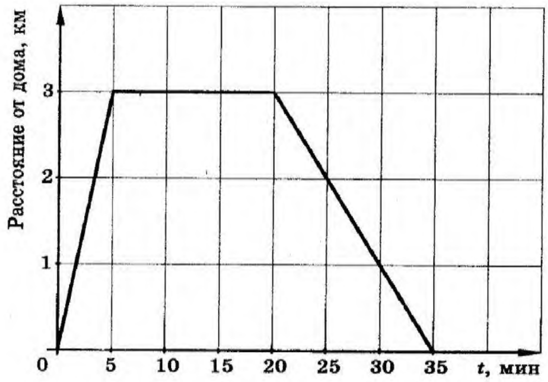


Рис. 41

Практическая работа № 35
Тема: «Решение задач на статистику»

Цели: отработать навыки решения задач на статистику.
Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник
Порядок выполнения работы:
1 **Виды средних величин**

Средняя величина – это обобщающий показатель, характеризующий типический уровень явления в конкретных условиях места и времени. Он отражает величину признака, отнесенную к единице совокупности. Средняя всегда обобщает количественную вариацию признака, т.е. в средних величинах погашаются индивидуальные различия

Единиц 1 совокупности, обусловленные случайными обстоятельствами.

В статистике выделяют степенные и структурные средние. Под структурными средними понимают моду и медиану. Степенные, в свою очередь, бывают простыми и взвешенными. Простая средняя исчисляется по несгруппированным данным:

$$\bar{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m}{n}},$$

где x_i – значение осредняемого признака;

m – показатель степени средней;

n – число значений осредняемого признака.

Взвешенная средняя исчисляется по сгруппированным данным, представленным в виде дискретных или интервальных рядов распределения:

$$\bar{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^m f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}},$$

где xi – значение осредняемого признака или серединное значение
интервала, в котором измеряется признак;
m – показатель степени средней;
fi – частота, показывающая сколько раз в совокупности встречается
i-е значение осредняемого признака.

В зависимости от показателя степени средней (m) получают соответствующую степенную среднюю:

при m = –1 получаем среднюю гармоническую;
при m = 0 среднюю геометрическую;
при m = 1 среднюю арифметическую;
при m = 2 среднюю квадратическую, и т.д. (см. табл. 1.1).

Вид степенной средней	Показатель степени средней (m)	Формула расчета	
		Простая	Взвешенная
Гармоническая	–1	$\bar{X} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$	$\bar{X} = \frac{\sum k}{\sum \frac{k}{x}}$, где $k = xf$
Геометрическая	→0	$\bar{X} = \sqrt[n]{\Pi x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$	$\bar{X} = \sqrt[\Sigma f]{\Pi x^f} = \sqrt[\Sigma f]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_n^{f_n}}$
Арифметическая	1	$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$
Квадратическая	2	$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$	$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$

Пример 1. Измерив рост всех студентов в группе, получили следующие данные: 1,64 м, 1,86 м, 1,72 м, 1,95 м, 1,76 м, 1,65 м, 1,79 м, 1,82 м, 1,92 м. Найти средний рост студентов в группе.

Решение. Для определения среднего роста студентов в группе необходимо суммарный рост всех студентов в группе разделить на количество студентов. Всего в группе 9 студентов, обозначим рост каждого студента xi, где i принимает значения от 1-го до 9-ти. Тогда, средний рост определяется по формуле средней арифметической простой:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9} = \frac{1{,}64 + 1{,}86 + 1{,}72 + 1{,}95 + 1{,}76 + 1{,}65 + 1{,}79 + 1{,}82 + 1{,}92}{9}$$

$$= \frac{16{,}11}{9} = 1{,}79 \text{ м}$$

Пример 2. Были проведены испытания точности спортивной винтовки, а именно, произведены 5 выстрелов, в каждом из них пуля отклонилась от цели на:

Номер испытания по порядку	Отклонение от цели, в мм
1	0 (точно в цель)
2	20
3	–16
4	0 (точно в цель)
5	–4

Найти среднюю величину отклонения от цели при стрельбе из спортивной винтовки.

Решение. В данном случае суммируя все значения осредняемого признака (xi – отклонение от цели при стрельбе) получаем нулевую сумму: В этом случае, используя простую среднюю арифметическую для расчета среднего значения отклонения от цели, мы получили бы нулевой

результат. Что неверно, так как по данным испытай нельзя сказать, что винтовка бьет без промаха. Потому, для расчета средней величины отклонения от цели воспользуемся формулой средней квадратической простой:

$$\bar{X} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{0^2 + 20^2 + (-16)^2 + 0^2 + (-4)^2}{5}} \approx 11{,}59 \text{ мм}$$

Т.е. в результате пяти выстрелов среднее отклонение от цели составило 11,59 мм (в обе стороны, т.е. + / –).

2. **Структурные средние**.

Важной характеристикой центра распределения, помимо средней, являются, так называемые структурные средние – мода (Мо) и медиана (Ме).

В отличие от средней арифметической, на которую влияют все значения изучаемого признака x_i, структурные средние не зависят от крайних значений признака. Потому они являются лучшей, чем среднее арифметическое, характеристикой центра распределения для рядов с неопределенными границами (например, для рядов с открытыми крайними границами интервалов). По определению мода -это значение признака наиболее часто

встречающееся в вариационном ряду. А медианой называют значение признака, которое делит упорядоченную последовательность xi на две равные по численности части. В итоге у одной половины единиц совокупности значение признака не превышает медианный, а у другого – превышает медианный уровень. Для дискретного ряда мода и медиана находятся непосредственно по определению. Так, по данным табл. 1.3 определим, что типичным исходом футбольного матча во время Чемпионата мира 2018 г. был один забитый гол, т.е. мода равна 1 (наибольшее число матчей – 46, это матчи с одним забитым

голом, 1 – значение признака которое встречается чаще всего, это и есть мода).

Таблица 1.3

Распределение футбольных матчей по числу забитых за матч мячей обеими командами (Чемпионат мира 2018)

Число забитых мячей в матче	Число матчей
0	21 } 67 (= 21 + 46)
1	46 }
2	34
3	14
4	9

На практике встречаются многовершинные распределения, т.е. распределения в которых несколько максимумов частот, несколько мод. Наличие нескольких вершин (нескольких мод) является признаком того, что изучаемая совокупность состоит из неоднородных, с точки зрения изучаемого признака, единиц.

Например, изучая спрос на мероприятия, проводимые на детских праздниках, было получено многовершинное распределение, распределение с двумя модами (см. табл. 1.5). Так, наиболее востребованными оказались фокусы и участие в дне рождения слона (у этих опций развлечений максимальная частота – 57). Что наталкивает на мысль о что изучаемая совокупность семей неоднородна (в выборке присутствуют более обеспеченные семьи и семьи со средним достатком). Как результат, напрашивается вывод, что такую совокупность имеет смысл разделить на две и рассматривать каждую из них отдельно.