Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Училище олимпийского резерва № 1»

ПРИНЯТО
Педагогическим советом
протокол № 13 от 18 июня 2024 г.

Подписано цифровой подписью: Кузнецов Виктор Александрович
DN: E=uc_fk@roskazna.ru, S=77 Москва, ИНН ЮЛ=7710568760, ОГРН=1047797019830, STREET="Большой Златоустинский переулок, д. 6, строение 1", L=г. Москва, C=RU, O=Казначейство России, CN=Казначейство России
Дата: 19 Июнь 2024 г. 17:30:22

УТВЕРЖДАЮ
ДИРЕКТОР СПб ГБПОУ «УОР № 1»

________________ В.А. КУЗНЕЦОВ

19 июня 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ОП.02 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

программа подготовки специалистов среднего звена
49.02.01 Физическая культура

Санкт-Петербург
2024 год

Организация-разработчик: Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Училище олимпийского резерва № 1».

Разработчик: Березина М.Г., преподаватель дисциплины ОП.02 Математические методы решения профессиональных задач.

Рассмотрено на заседании предметно-цикловой комиссии дисциплин профессионального цикла СПб ГБПОУ «УОР № 1»

Протокол № 14 от 31 мая 2024 г.

Председатель предметно-цикловой комиссии дисциплин профессионального цикла –
С.Н. Бекасова

Утверждено приказом СПб ГБПОУ «УОР № 1» от 19.06.2024 № 181 «Об утверждении учебных планов, графиков учебного процесса, рабочих программ учебных дисциплин (модулей) и практик, фондов оценочных средств, учебно-методических рекомендаций, рабочей программы воспитания, календарного плана воспитательной работы на 2024-2025 учебный год – образовательных программ среднего профессионального образования по специальности 49.02.01 Физическая культура»

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	4
ИНСТРУКЦИОННЫЕ КАРТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	7
Раздел 1. Элементы теории множеств и математической логики Тема 1.1 Множества и операции над ними	7
Тема 1.2 Основы математической логики	14
Тема 1.3 Математические доказательства	23
Раздел 2. Матрицы. Методы решения систем линейных уравнений	28
Раздел 3.. Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики	49
Тема 3.1 Комбинаторика	
Тема 3.2 Элементы теории вероятностей	64
Тема 3.3 Элементы математической статистики	68

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Математические методы при решении профессиональных задач» предназначены для студентов 1 курса на базе среднего (полного) общего образования и студентов 2 курса на базе основного общего образования, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальности 49.02.01 «Физическая культура».

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности учебного процесса, а также оказание помощи учащимся в выполнении практических работ по дисциплине «Математические методы при решении профессиональных задач».

Выполнение практических заданий является неотъемлемым этапом изучения дисциплины. Практические задания выполняются студентами самостоятельно или с помощью преподавателя во время учебного процесса согласно календарно-тематическому плану на основании нормативных документов, методических указаний, полученных теоретических знаний и умений.

В соответствии с учебным планом на практические занятия отводится 52 часа.

Методические рекомендации составлены для формирования практических умений и навыков по следующим разделам:

- Элементы теории множеств и математической логики;
- Матрицы, решение систем линейных уравнений
- Приближенные вычисления;
- Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики.

Выполнение студентами практических работ направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического цикла;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, конструктивных;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность;
- формированию общих и учебных компетенций в соответствии с требованиями ППССЗ.

Контроль выполнения практических заданий осуществляется во время проведения аудиторных занятий, после их предоставления в письменном виде и оформленных согласно заданию. Критериями оценивания результатов выполнения практического задания студентами являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Порядок выполнения практической работы по математике.

1. Изучить основные теоретические сведения к практической работе.
2. Под руководством преподавателя выполнить упражнения тренировочного характера (если они предусмотрены). Форма проведения: фронтальная, индивидуальная.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить ход выполнения работы с необходимыми пояснениями.

Критерии оценивания.

Оценку по практической работе студент получает, с учетом срока выполнения работы.

Отметка «5» ставиться, если:

- работа выполнена полностью правильно;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- студент может пояснить выполнение любого этапа работы;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);
- задание выполнено в установленный срок

Отметка «4» ставится, если:

- выполнено верно на 75-90%;
- либо работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являются специальным объектом проверки);
- работа сдана в установленный срок.

Отметка «3» ставиться, если:

- выполнено верно на 50-75% ;
- самостоятельность в работе была низкой
- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;
- на выполнение работы затрачено времени, больше установленного по норме.

В случае пропуска или невыполнения (не готов к занятию) студентом практического занятия считается необходимым отработка данной работы во внеурочное время.

Выполнение практических заданий поможет студентам сформировать общие и профессиональные компетенции, указанные в *Федеральном государственном образовательном стандарте среднего профессионального образования по специальности* 49.02.01 *Физическая культура*:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с коллегами и социальными партнерами.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность занимающихся физической культурой и спортом, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за качество учебно-тренировочного процесса и организации физкультурно-спортивных мероприятий и занятий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Осуществлять профессиональную деятельность в условиях обновления ее целей, содержания и смены технологий.

ПК 1.4. Осуществлять педагогический контроль, оценивать процесс и результаты деятельности спортсменов на учебно-тренировочных занятиях и соревнованиях.

ПК 1.5. Анализировать учебно-тренировочные занятия, процесс и результаты руководства соревновательной деятельностью.

ПК 2.4. Осуществлять педагогический контроль в процессе проведения физкультурно-спортивных мероприятий и занятий.

ПК 2.5. Организовывать обустройство и эксплуатацию спортивных сооружений и мест занятий физической культурой и спортом.

ПК 2.6. Оформлять документацию (учебную, учетную, отчетную, сметно-финансовую), обеспечивающую организацию и проведение физкультурно-спортивных мероприятий и занятий, и функционирование спортивных сооружений и мест занятий физической культурой и спортом.

ПК 3.3. Систематизировать педагогический опыт в области физической культуры и спорта на основе изучения профессиональной литературы, самоанализа и анализа деятельности других педагогов.

ПК 3.4. Оформлять методические разработки в виде отчетов, рефератов, выступлений.

ПК 3.5. Участвовать в исследовательской и проектной деятельности в области образования, физической культуры и спорта.

В результате выполнения практических заданий по дисциплине «Математика» у обучающихся должны быть сформированы следующие умения:

У.1 применять математические методы для решения профессиональных задач;

У.2 решать комбинаторные задачи, находить вероятность событий;

У.3 анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически;

У.4 выполнять приближенные вычисления;

У.5 проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тематика практических занятий	**Кол-во часов**
Выполнение операций над множествами	2
Применение элементов теории множеств для решения профессиональных задач	2
Применение логических операций и законов логики для решения профессиональных задач	4
Применение способов обоснования истинности высказывания для решения профессиональных задач	2
Действия с матрицами	2
Решение матричных уравнений	2
Метод Гаусса	2
Решение СЛУ, полученных при исследовании данных в профессиональной деятельности	2
Установление зависимостей между величинами, используемыми в профессиональной деятельности	2
Выполнение действий над приближенными значениями величин	2
Решение задач на процентное соотношение чисел	2
Анализ результатов измерения величин с допустимой погрешностью и их графическое представление	4
Применение комбинаторики для решения профессиональных задач	2
Решение задач на нахождение вероятности событий	2
Применение основ теории вероятностей для решения профессиональных задач	2
Проведение элементарной статистических обработки информации и результатов исследований	2
Применение статистических методов для решения профессиональных задач	4
ИТОГО часов:	***52***

ИНСТРУКЦИОННЫЕ КАРТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Раздел 1. Элементы теории множеств и математической логики

Тема 1.1 Множества и операции над ними

Практическое занятие: Выполнение операций над множествами

Цель работы: уметь выполнять операции над множествами.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.2, ОК.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

1. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ: учебник. / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник. / А.А.Дадаян. – 3-е изд. – М.: ФОРУМ, 2015. – 544 с.

Теоретический материал:

Определение: Множество *– это совокупность некоторых элементов. Множество может быть составлено на основе различных признаков и элементов (объектов).*

Примеры множеств:

1) множество студентов в группе;
2) множество книг на полке;
3) множество людей в мире;
4) множество действительных чисел.

Определение: *Объекты, составляющие множество, называются его элементами.*

Обозначения:

1) Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, C,…
2) Элементы множеств – строчными a, b, c,…
3) Элементы множества заключаются в фигурные скобки.

Пример: A={11; -25; $\frac{3}{4}$; $\sqrt[3]{7}$}

Особую важность имеют множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел. Для них были приняты свои обозначения:

N – множество всех натуральных чисел: N={1; 2; 3;…+∞};

Z – множество целых чисел: Z={0; ±1; ±2; ±3;… ±∞};

Q – множество *рациональных чисел* – это те числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби: Q={$-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{2}{7}$; 0; $-34{,}24$; $-\frac{100}{43}$} (десятичные и периодические дроби);

J – множество *иррациональных чисел* – числа, которые представляют собой бесконечные, непериодические десятичные дроби: J={π; $\sqrt{2}$; e};

R – множество *действительных чисел* – совокупность рациональных и иррациональных чисел: R={$-\frac{5}{27}$; $\frac{9}{4}$; π; $\sqrt{3}$}, т.е. те числа, которые могут быть записаны в виде конечной и бесконечной (периодической и непериодической) десятичной дроби;

C – множество комплексных чисел. *Комплексное число* — это выражение вида $a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, символ, квадрат которого равен –1, то есть $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью, а b_i — мнимой частью комплексного числа $c = a + bi$. Если $b = 0$, то вместо $a + 0i$ пишут просто a.

Если элемент a принадлежит множеству M, то пишут a ∈ M. Если элемент b не принадлежит множеству M, то пишут b ∉ M .

Пример: Рассмотрим множество A={1;2;3;5;8}, состоящее их 5 чисел. Из условия видно, что $3 \in A$, $8 \in A$, $0 \notin A$, $\frac{1}{3} \notin A$.

Определение: *Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным, из бесконечного числа элементов – бесконечным.*

Примеры:

1) Множество дней в году – конечное множество.
2) Множество целых чисел – бесконечное множество.

Определение: *Множество**,** не имеющее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается Ø.*

Пример: Найти множество М четных чисел во множестве $A=\{1;3;5;7\}$.

Так как во множестве А нет четных чисел, то множество М будет пустым, т.е. М=Ø

Определение: *Если каждый элемент множества А есть элемент множества В, то говорят, что А есть подмножество множества В, и пишут $A \subseteq B$.*

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут, что $A \subset B$.

Примеры:

1) $A=\{3;4;7;9;11;35\}$, $B=\{7;35\}$. Имеем: $B \subset A$.
2) N-множество натуральных чисел, Z-множество целых чисел, Q-множество рациональных чисел. Имеем: $N \subset Z \subset Q$.

Способы задания множеств

Существует 3 способа задания множеств.

1) перечисление его элементов.

Так можно задавать лишь конечные множества.

Пример: $A=\{2;4;6;8;10\}$.

2) описание характеристических свойств, которыми обладают его элементы.

Пример: $A=\{x \in N \mid x:2\}$ – множество натуральных чисел, делящихся на 2.

3) порождающая процедура, которая описывает способ получения элементов множества из уже имеющихся элементов либо других объектов. В этом случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Пример: Задать с помощью порождающей процедуры множество N всех натуральных чисел: 1,2,3,…

Решение: в данном случае порождающая процедура содержит два правила: а) $1 \in N$; б) если $x \in N$, то $x+1 \in N$.

Пример: Задать с помощью порождающей процедуры множество А всех четных чисел, не превышающих 100: $A=\{2;4;6;\ldots;100\}$.

Решение: а) $2 \in N$; б) если $x \in N$; то $x+2 \in A$; в) $x \leq 98$.

Операции над множествами.
Диаграммы Эйлера-Венна

Геометрически множества часто изображают с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

Определение: *Универсальным множеством U называется множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании. Обозначается прямоугольником.*

Внутри универсального множества U (прямоугольника) помещаются овалы, соответствующие рассматриваемым множествам. Овалы должны быть соответствующим образом обозначены и могут схематически пересекаться или не пересекаться, в зависимости от условия задачи.

Для конечных множеств их элементы часто обозначаются точками. Подмножества, обладающие определенными свойствами, могут отмечаться штриховкой.

Примеры приведены на рис.2.1 и рис.2.2.

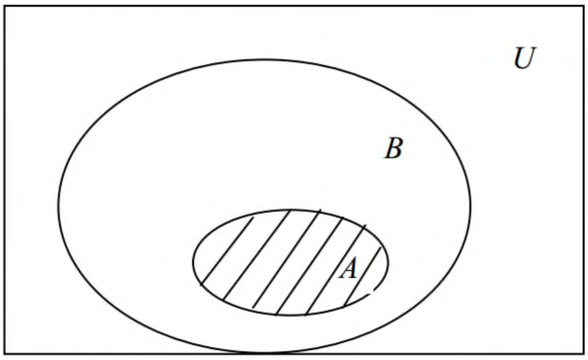


Рис. 2.1. Изображение диаграммой Эйлера-Венна множеств А и В таких, что $A \subset B$.

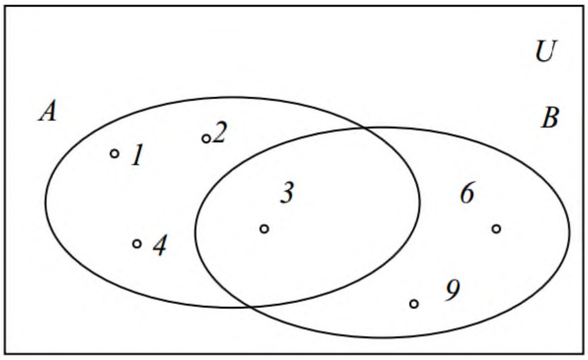


Рис. 2.2. Изображение диаграммой Эйлера-Венна множеств А и В таких, что А = {1,2,3,4}, В = {3,6,9}.

Основные операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Определение: *<u>Объединением</u> множеств А и В (обозначается $A \cup B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А и В, и не содержащее никаких других элементов (рис.2.3).*

Например: Даны множества А={1; 2; 3; 4} и В={3; 6; 9}. Найти $A \cup B$.

Решение: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9\}$.

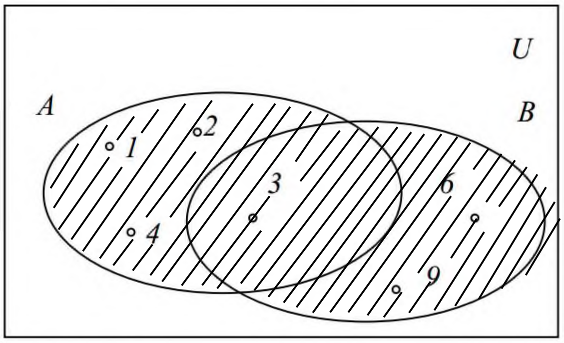


Рис. 2.3. Операция объединения $A \cup B$

Определение: *<u>Пересечением</u> множеств А и В (обозначается $A \cap B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат одновременно и множеству А и множеству В , и не содержащее никаких других элементов (рис.2.4):*

Пример: Даны множества А={1; 2; 3; 4} и В={3; 6; 9}. Найти $A \cap B$.

Решение: $A \cap B = \{3\}$.

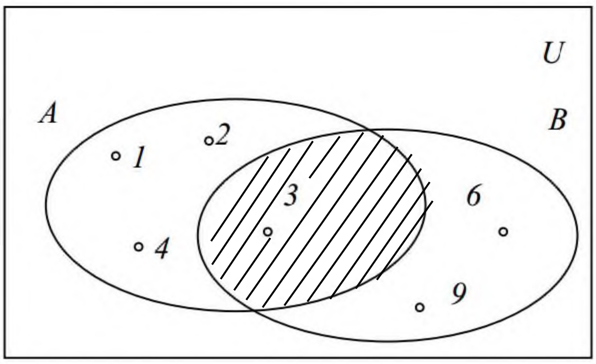


Рис. 2.4. Операция пересечения $A \cap B$.

Определение: *<u>Разностью</u> множеств А и В (обозначается А \ В) называется множество тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, и не содержащее никаких других элементов (рис.2.5).*

Свойство: А \ В ≠ В \ А.

Пример: Даны множества А={1; 2; 3; 4} и В={3; 6; 9}. Найти $A\backslash B$.

Решение: $A\backslash B = \{1; 2; 4\}$.

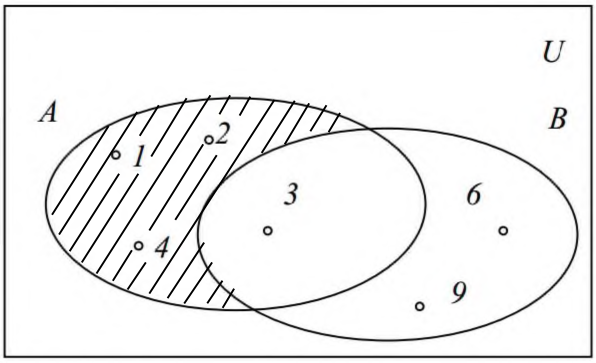


Рис. 2.5. Операция разности А \ В

***Приоритет выполнения операций*:** если задание содержит несколько операций, то сначала выполняется операция пересечения и только потом объединения и разности. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Примеры выполнения заданий:

Задание 1. Задайте множества другими способами (если это возможно):

1) $A = \{x|\ x \in N,\ x \leq 9\}$

Решение: Элементами множества А являются натуральные числа, которые меньше 9 и само число 9, значит, $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

2) $A = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0; 1; 2; 3; 4\}$

Решение: $A = \{x|\ x \in Z,\ |x| \leq 4\}$ – множество целых чисел, модуль которых не больше 4.

3) $A = \{x|\ x \in R,\ x^2 - 3 = 0\}$

Решение: Элементами множества A являются корни уравнения $x^2 - 3 = 0$. Значит $A = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

Задание 2. Даны множества $A = \{2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13; 15\}$, $B = \{1;\ 3;\ 4;\ 8; 16\}$, $C = \{12;\ 13;\ 15; 16\}$, $D = \{0; 1; 20\}$. Найти:

1) $A \cup B$
2) $C \cup D$
3) $B \cap C$
4) $A \cap D$
5) $A \setminus C$
6) $D \setminus B$
7) $A \cup B \cup C$
8) $A \cap B \cap C$
9) $A \cap C \setminus D$
10) $B \cup D \cap C$

Решение:

1) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 13; 15; 16\}$
2) $C \cup D = \{0; 1;\ 12;\ 13;\ 15; 16; 20\}$
3) $B \cap C = \{16\}$
4) $A \cap D = \emptyset$
5) $A \setminus C = \{2; 3; 5; 8\}$

6) $D \setminus B = \{0; 20\}$
7) $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 12;\ 13; 15; 16\}$
8) $A \cap B \cap C = \emptyset$
9) $A \cap C \setminus D = \{13;\ 15\}$
10) $B \cup D \cap C = \{1; 3; 4; 8; 16\}$

Примечание к заданию № 10: Необходимо учесть, что сначала выполняется операция пересечения множеств $B \cup \underline{D \cap C}$, а затем объединение:
$\mathrm{D} \cap \mathrm{C} = \emptyset$
$B \cup \emptyset = \{1; 3; 4; 8; 16\}$

Тренировочные упражнения

1. Данные множества задать перечислением всех своих элементов.

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
$A=\{x \in R \mid x^3-3x^2+2x=0\}$.	$A=\{x \in Z \mid \frac{1}{4} \le 2^x < 5\}$	$A=\{x \in N \mid x^2-3x-4 \le 0\}$

2. Даны множества А и В. Найти: A∩B, A∪B, A\B, B\A, $\overline{B}$.

	Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
а)	А, В ⊆ Z A = {1;2;5;7;9;11} B = {1;4;6;7}	А, В ⊆ Z A = {3;6;7;10} B = {2;3;10;12}	А, В ⊆ Z A = {1;2;5;7;9;11} B = {1;4;6;7}
б)	A = { a , b , c , d , e , f , k } B = { a , c , e , k , m , p }	A = { a , b , c , e , k, l, m } B = { c , e , k , x , y, z }	A = { b , c , d , e , f , x, y} B = { a , e ,f , k , n, o}
в)	А, В ⊆ R A = [-3; 7), B = [-4; 4].	А, В ⊆ R A = [1;6), B = [-1;9]	А, В ⊆ R A = [4; 7), B = [3; 6]
г)	$A=\{2n-1 \mid n \in N\}$, $B=\{-3,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$	$A=\{2n \mid n \in N\}$, $B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$	$A=\{2^n \mid n \in N\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

Практическое занятие: Применение элементов теории множеств для решения профессиональных задач

Цель работы: уметь решать задачи с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.2, ОК.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

1. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ: учебник. / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник. / А.А.Дадаян. – 3-е изд. – М.: ФОРУМ, 2015. – 544 с.

Теоретический материал:

Повторить теоретический материал «Основные операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна»

Мощностью конечного множества называется количество его элементов.

Для конечного множества А **через m (A) обозначим число элементов в множестве А**.

Из определение следуют свойства:
m (A) + m (Ā) = m (E)
A = B => m(A) = m(B)
Для любых конечных множеств справедливы так же утверждения:

M($A \cup B$)=m (A) + m (B) – m (A∩B)

m $(A \cup B \cup C)$= m (A) + m (B) + m (C)– m (A∩B) - m (A∩C) – m (B∩C) – m (A∩B∩C).

Пример решения задач с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Этот способ решать задачи придумал в XVIII в. великий Леонард Эйлер.

Задача.

В олимпиаде по математике приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько учащихся решили все задачи? Сколько учащихся решили только две задачи? Сколько учащихся решили только одну задачу?

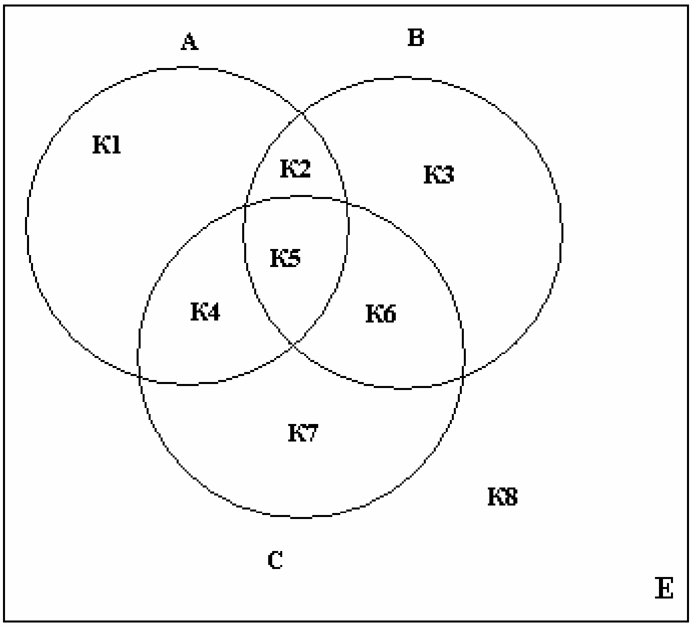
Решение.

Запишем коротко условие и покажем решение:

m (E) = 40; m (A) = 20; m (B) = 18; m (C) = 18; m (A∩B) = 7; m (A∩C) = 8; m (B∩C) = 9;

m (ABC) = 3 => m (ABC) = 40 – 3 = 37

Изобразим множества A, B, C (рис.5).



К1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;

К2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;

К3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

К4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;

К5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

К6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

К7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

К8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:

m (К5) = m (A∩B∩C)= m (ABC) - m (A) - m (B) - m (C) + m (A∩B) + m (A∩C) + m (B∩C);

m (К5) = 37-20-18-18+7+8+9=5; m (К2) = m (A∩B) - m (К5) = 7-5=2

m (К4) = m (A∩C) - m (К5) = 8-5=3; m (К6) = m (B∩C) - m (К5) = 9-5=4 m (К1) = m (A) - m (К2) - m (К4) - m (К5) = 20-2-3-5=10;

m (К3) = m (B) - m (К2) - m (К6) - m (К5) = 18-2-4-5=7;

m (К7) = m (C) - m (К4) - m (К6) - m (К5) = 18-3-4-5 =6

m (К2) + m (К4) + m (К6) = 2+3+4=9 – число учеников решивших только две задачи;

m (К1) + m (К3) + m (К7) = 10+7+6=23 – число учеников решивших только одну задачу.

Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

Тренировочные упражнения:

Задача № 1. В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского

транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников. Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?

Задача № 2. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной.

Сколько шестиклассников:1. Являются читателями обеих библиотек;2. Не являются читателями районной библиотеки;3. Не являются читателями школьной библиотеки; 4. Являются читателями только районной библиотеки;5. Являются читателями только школьной библиотеки?

Задача № 1. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции,10-в Италии,6-в Англии; в Англии и Италии-5; в Англии и Франции -6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?

Задача №2.В трёх группах 70студентов. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 студентов из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько студентов не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько студентов заняты только спортом?

Задача №5. Часть жителей нашего дома выписывают только газету «Комсомольская правда», часть – только газету «Известия», а часть – и ту, и другую газету. Сколько процентов жителей дома выписывают обе газеты, если на газету «Комсомольская правда» из них подписаны 85%, а на «Известия» – 75%?

Задача №3. Первую или вторую контрольные работы по математике успешно написали 33 студента, первую или третью – 31 студент, вторую или третью – 32 студента. Не менее двух контрольных работ выполнили 20 студентов. Сколько студентов успешно решили только одну контрольную работу?

Задача №7. В футбольной команде «Спартак» 30 игроков, среди них 18 нападающих. 11 полузащитников, 17 защитников и вратари. Известно, что трое могут быть нападающими и защитниками, 10 защитниками и полузащитниками, 6 нападающими и защитниками, а 1 и нападающим, и защитником, и полузащитником. Вратари не заменимы. Сколько в команде «Спартак» вратарей?

Задача №8. В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?

Тема 1.2 Основы математической логики

Практическое занятие: Применение логических операций и законов логики для решения профессиональных задач

Цель работы: уметь составлять таблицы истинности для высказываний, преобразовывать формулы с помощью равносильных преобразований, решать булевы уравнения.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.1, ОК.2, ПК. 3.4.

Продолжительность занятия: 4 часа.

Информационное обеспечение занятия:

1. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ: учебник. / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник. / А.А.Дадаян. – 3-е изд. – М.: ФОРУМ, 2015. – 544 с.

Теоретический материал:

1.1. ***Высказывания и операции над ними***

Математическая логика – это раздел математики, посвященный анализу методов рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т.е. исследуется формализация рассуждений? Это разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения.

Основное неопределяемое понятие математической логики это *высказывание.* Под *высказыванием* понимают предложение, которое может принимать только два значения «истина» или «ложь». Обозначаются высказывания малыми латинскими буквами: a, b, ,…,x,…. или большими латинскими буквами А, В, С…

В математической логике не рассматривается смысл высказываний, определяется только их логическое значение – «истина» или «ложь». Известному немецкому математику и логику Эрнесту Шредеру пришло в голову предложить в качестве знака для обозначения ложного суждения цифру 0, что, конечно, привело к обозначению истины цифрой 1.

Исчисление высказываний – вступительный раздел математической логики, в котором рассматриваются логические операции над высказываниями.

Предикат – логическая функция от n переменных, которая принимает значения истинности или ложности.

Исчисление предикатов – раздел математической логики, объектом которого является дальнейшее изучение и обобщение исчисления высказываний.

Теория булевых алгебр (булевых функций) положена в основу точных методов анализа и синтеза в теории переключательных схем при проектировании компьютерных систем.

Примеры.

1. «Река Кола впадает в Кольский залив» – высказывание (истинное).
2. «Число32 кратно 3» – высказывание (ложное).
3. «Может быть, сегодня пойдет снег» – не высказывание.
4. «$5x - 9 = 7$» – не высказывание (неопределенное высказывание или высказывательная форма).

С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами «и», «или», связками «не», «следует» и др. Операции над высказываниями можно описывать при помощи некоторого математического аппарата.

Основные логические операции над высказываниями.

Отрицанием высказывания x называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание x ложно. Отрицание обозначается $\overline{X}$ или $\neg x$ (читается: «не x»).

Логические операции можно задавать при помощи *таблиц истинности*, показывающих соответствие значений истинности высказываний. Для высказываний x и $\overline{X}$ эта таблица имеет вид:

x	$\overline{X}$
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y. Конъюнкция обозначается: $x \wedge y$, или x & y (читается: «x и y»). Таблица истинности для $x \wedge y$ имеет вид:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны. Дизъюнкция обозначается $x \vee y$ (или $x+y$) (читается: «x или y»). Таблица истинности для $x \vee y$ имеет вид:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно. Импликация обозначается: $x \to y$ (читается: «x влечет y» или «из x следует y»). Высказывание x называется *посылкой импликации*, а высказывание y – *следствием*. Таблица истинности для $x \to y$ имеет вид:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией (эквивалентностью) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают. Эквиваленция обозначается: $x \leftrightarrow y$, или $x \sim y$ (читается: «x эквивалентно y» или «x тогда и только тогда, когда y»). Таблица истинности для $x \leftrightarrow y$ имеет вид:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Алгебра Буля.

Множество высказываний с введенными для них логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания основными законами этих действий называется ***алгеброй Буля***. Алгебра Буля— исторически первый раздел математической логики, разработанный ирландским логиком и математиком Дж. Булем (George Boole (1815—1864) — английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка). в середине XIX в. Буль применил алгебраические методы для решения логических задач и сформулировал на языке алгебры некоторые фундаментальные законы мышления

Законы алгебры Буля.

Коммутативные законы:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$;
2. $x \vee y \equiv y \vee x$;

Ассоциативные законы:

1. x
2. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;

Дистрибутивные законы:

1. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. x

Идемпотентные законы:

1. x
2. x

Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

1. x
2. $x \wedge 0 \equiv 0$;
3. x
4. x

Законы операции «черта»:

$x \vee 1 \equiv 1$;

3. x

$x \vee 1 \equiv 1$;

5. x

Законы Де Моргана (Augustus de Morgan (1806- 1871) — шотландский математик и логик; профессор математики в Университетском колледже Лондона):

$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$

$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$

*Сложением по модулю два (*альтернативной дизъюнкцией, логи́ческим сложе́нием, исключающим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и yпринимают разные значения. Дизъюнкция обозначается $x \oplus y$ (читается: «или x, или y»). Таблица истинности для $x \oplus y$ имеет вид:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	*0*	*0*

Стрелка Пирса – это отрицание дизъюнкции.

Стрелка Пирса обозначается X ↓ Y. Читается «ни X, ни Y».

Введена в рассмотрение Чарльзом Пирсом (Charles Peirce) в 1880—1881 г.г. Таблица истинности для стрелки Пирса имеет вид:

x	y	$x \downarrow y$

1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Штрих Шеффера – это отрицание конъюнкции.

Введена в рассмотрение Генри Шеффером в 1913 г. (в отдельных источниках именуется как Пунктир Чулкова)

Штрих Шеффера обозначается x|y , задаётся следующей таблицей истинности:

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
		1

1.3.*Формулы алгебры логики*

Формулами алгебры логики называются выражения, полученные из переменных x, y,… посредством применения логических операций: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний x, y,….

Если в формулу алгебры логики вместо переменных x, y,… подставить конкретные высказывания, то получится высказывание, имеющее логическое значение «1» или «0».

Пример.

Высказывание x: «Волга впадает в Каспийское море» – истинное ($x = 1$),

высказывание y: «Число 16 кратно 3» – ложное ($y = 0$),

тогда формула $A = x \vee y$ будет иметь логическое значение «1»: $A = 1$ (см. таблицу истинности для $x \vee y$).

На основе таблиц истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для различных формул алгебры логики.

Две формулы алгебры логики называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы переменных (элементарных высказываний). Равносильность формул будем обозначать знаком «≡».

Равносильность логических формул можно установить при помощи их таблиц истинности.

Пример. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными формулы $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ и $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

Решение. Составим таблицы истинности для каждой из формул A и B.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Ответ: данные формулы являются равносильными.

Другой способ доказательства равносильности логических формул – их упрощение с использованием *равносильных преобразований*.

2. Выражения одних логических операций через другие:

а) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$; б) $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

в) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$; г) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: Сначала выполняем действия в скобках, затем отрицание, затем выполняется конъюнкция. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Пример Упростить логическу

Решение. Используем основные равносильности.

$$\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \left(x \vee (y \wedge x)\right) \equiv$$

$$\equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee x \equiv \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee x \equiv$$

$$\equiv x \vee y \vee x \equiv x \vee x \vee y \equiv x \vee y .$$

Ответ: $x \vee y$.

Образец решения примера.

3.Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$x \wedge (y \mid z)$ *и* $(x \wedge y)(x \wedge z)$

Решение.

Составим таблицы истинности для каждого высказывания.

x	y	z	y|z	$x \wedge (y \mid z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y)(x \wedge z)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0

Значения x и y в пятом и восьмом столбцах не совпадают.

Вывод: данные высказывания не являются эквивалентными

Решение логических задач

Алгебра логики находит широкое применение при решении логических содержательных задач. Существуют разные методы формализации как условий задачи, так и процесса ее решения: алгебраический, табличный, графический и др. Каждый из этих методов обладает своими достоинствами.

При применении *алгебраического метода* наиболее трудным является перевод текста задачи на язык формул. Далее решение задач сводится к формальным преобразованиям с помощью логических законов и свойств и приводит сразу к ответу.

Табличный метод очень нагляден, но не обладает универсальностью, т.е. предназначен для решения только определенного класса задач. Кроме того, он требует анализа находящейся в таблице информации, умения сравнивать и сопоставлять.

Графический метод применяется тогда, когда между объектами, о которых идет речь в задаче, существует много связей. Граф позволяет наглядно представить эти связи и определить, какие из них не противоречат условиям задачи.

Как правило, задачу можно решать несколькими способами. Чтобы выбрать наиболее простой и эффективный способ для каждой конкретной задачи, необходимо знать все способы.

Задание

Кто из учеников A, B, C, D играет в шахматы, если известно следующее:

1. Если А или В играет, то С не играет.
2. Если В не играет, то играют С и D.
3. С играет.

В ответе необходимо указать только две буквы в алфавитном порядке, соответствующие игрокам, играющим в шахматы.

Решение:

В условии задания очевидны три высказывания. Составим на основе данных высказываний логические выражения. Объединив все полученные высказывания конъюнкцией и приравняв полученное логическое выражение 1, получим уравнение, решив которое найдем игроков в шахматы

На основе высказывания 1 условия задания построим следующее логическое выражение: $(A \lor B) \to \bar{C}$

На основе высказывания 2 построим логическое выражение $(\bar{B} \to (C \land D))$.

На основе высказывания 3 построим следующее логическое выражение: С.

Объединив все приведенные выше выражения конъюнкцией и приравняв логическое выражение 1, получим уравнение, решив которое найдем игроков в шахматы:

$$\big((A \lor B) \to \bar{C}\big) \land \big(\bar{B} \to (C \land D)\big) \land C = 1$$

Упростим это уравнение.

Воспользовавшись правилом замены импликации, получим уравнение следующего вида:

$$\big(\overline{(A \lor B)} \lor \bar{C}\big) \land \big(B \lor (C \land D)\big) \land C = 1$$

Применив закон де Моргана к выражению $\overline{(A \lor B)}$, имеем

$$\big((\bar{A} \land \bar{B}) \lor \bar{C}\big) \land \big(B \lor (C \land D)\big) \land C = 1$$

К выражениям в скобках применим закон дистрибутивности

$$(\bar{A} \lor \bar{C}) \land (\bar{B} \lor \bar{C}) \land (B \lor C) \land (B \lor D) \land C = 1$$

Проанализировав данное выражение, можно сделать вывод, что для того чтобы уравнение имело решения С, должна быть равна 1. Соответственно, заменив в уравнении С на 1, получим $(\bar{A} \lor 0) \land (\bar{B} \lor 0) \land (B \lor 1) \land$ $\land (B \lor D) \land 1 = 1$.

Воспользовавшись свойством констант для данного выражения имеем $\bar{A} \land \bar{B} \land (B \lor D) = 1$

Применим к выражению закон ассоциативности:

$\bar{A} \land \big((\bar{B} \land B) \lor (\bar{B} \land D)\big) = 1$.

По закону непротиворечивости выражение $\bar{B} \land B$ равносильно 0. Следовательно, уравнение примет вид $\bar{A} \land \big(0 \lor (\bar{B} \land D)\big) = 1$.

Применив свойство констант к выражению $0 \lor (\bar{B} \land D)$, получим уравнение $\bar{A} \land \bar{B} \land D$

Проанализировав данное уравнение, можно сделать вывод, что оно имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} = 0, \mathrm{B} = 0$ и $D = 1$. Соответственно, исходное уравнение $\big((A \lor B) \to \bar{C}\big) \land \big(\bar{B} \to (C \land D)\big) \land C = 1$ имеет решения при $\mathrm{A} = 0, \mathrm{B} = 0, \mathrm{C} = 1$ и D.

Отсюда можно сделать вывод, что в шахматы играют игроки С и D

Ответ: CD.

Задание

Девять школьников, оставшихся в классе на перемене, были вы званы к директору. Один из них разбил окно в кабинете. На вопрос директора, кто это сделал, были получены следующие ответы:

Володя: «Это сделал Саша».
Аня: «Володя лжет!»
Егор: «Маша разбила».
Саша: «Аня говорит неправду!»
Рома: «Разбила либо Маша, либо Нина…»
Маша: «Это я разбила!»
Нина: «Маша не разбивала!»
Коля: «Ни Маша, ни Нина этого не делали».
Олег: «Нина не разбивала!»

Кто разбил окно, если известно, что из этих девяти высказываний истинны только три?

Ответ запишите в виде первой буквы имени.

Решение

Так как в задании фигурирует большое количество участников и имеется большое количество высказываний, применять метод логических рассуждений очень сложно. Наиболее простым представляет метод последовательного перебора, т. е. будем последовательно предполагать, что каждый из девяти школьников разбил окно. Основываясь на данном предположении, проверим истинность высказываний всех школьников. По условию известно, что из девяти высказываний истинными являются только три, следовательно, школьником, разбившим окно, будет тот, для которого при выполнении перебора определятся три истинных высказывания из девяти.

Для удобства представления информации построим таблицу, в первом столбце которой запишем высказывания школьников. В следующих столбцах будем указывать значение истинности или ложности высказывания (0 — ложь, 1 — истина) относительно школьника, который предположительно разбил окно (столбец озаглавлен первой буквой имени школьника, предположительно разбившего окно).

Высказывание	Кто разбил окно?								
	В	А	Е	С	Р	М	Н	К	О
Володя: «Это сделал Саша».	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Аня: «Володя лжет!»	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Егор: «Маша разбила».	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Саша: «Аня говорит неправду!»	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Рома: «Разбила либо Маша, либо Нина…»	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Маша: «Это я разбила!»	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Нина: «Маша не разбивала!»	1	1	1	1	1	0	1	1	1
Коля: «Ни Маша, ни Нина этого не делали».	1	1	1	1	1	0	0	1	1
Олег: «Нина не разбивала!»	1	1	1	1	1	1	0	1	1

Из таблицы очевидно, что для всех школьников, кроме Нины истинны более трех высказываний, и только для Нины справедливо условие задачи, следовательно, Нина разбила окно.

Ответ: Н.

Тренировочные упражнения:

1) *Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно*

а) $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow (\overline{B} \wedge \overline{A})$

б) $((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow A$

в) $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$

г) $(x|\bar{y}) \oplus (\bar{z} \to x)$

2) *Являются ли эквивалентными следующие высказывания*

а) $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ *и* $x \wedge (y \oplus z)$

б) $x|(y \oplus z)$ *и* $(x|y) \vee (x|z)$

в) $(\overline{A \vee B}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{A})$ *и* $((A \vee B) \oplus \bar{B}) \Rightarrow A$

г) $(\overline{A \oplus B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \oplus \bar{A})$ *и* $A \Rightarrow ((A \vee B) \wedge \bar{B})$

3) *Решить булево уравнение*

а) $(\bar{z} \oplus x) \vee (\bar{z}|(y \vee \bar{x})) = x \wedge (y \oplus z)$

б) $(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})$ *=0*

в) $(\bar{z} \oplus y) \vee (\bar{z}|(y \vee \bar{x})) = x \wedge y$

г) $(\bar{z} \Rightarrow y) \oplus (\bar{z}|(y \vee \bar{x})) = x \oplus y$

4). Упростите выражения:

1) $A \wedge \bar{A} \vee B$
2) $\overline{(A \vee \bar{A})}$
3) $\overline{(\overline{B \wedge C})}$
4) $\overline{(C \wedge \bar{C})}$
5) $A \wedge (B \vee \bar{B})$
6) $\overline{(\bar{A} \vee B)}$
7) $A \vee (A \wedge B)$
8) $\overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}$
9) $A \wedge (A \vee B)$
10) $(A \vee A) \vee (A \wedge B)$

5). Упростите выражения. Проверьте правильность выполнения задания с помощью таблиц истинности:

1) $(A \to B) \vee A$
2) $(A \wedge B) \vee \overline{(A \vee B)}$
1) $(A \wedge (A \vee B) \vee \bar{A}) \wedge C$
2) $A \wedge B \vee A \wedge \bar{B}$

6) Какое логическое выражение равносильно выражению $\overline{(A \wedge B)} \vee \overline{(B \wedge \bar{C})}$*?*

1) $\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$
2) $A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
1) $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$
2) $A \wedge \bar{B} \wedge C$

7) Какое логическое выражение равносильно выражению $\bar{A} \to \overline{(B \wedge \bar{C})}$*?*

1) $A \vee \bar{B} \vee C$
2) $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$
1) $A \wedge (\bar{B} \vee C)$
2) $A \wedge \bar{B} \wedge C$

8) Какое логическое выражение равносильно выражению $\bar{A} \vee \overline{(B \vee B)}$*?*

1) $\bar{A}$
2) $\bar{B}$
1) $A \vee B$
2) 1

9) Какое логическое выражение равносильно выражению $\overline{(A \vee B)} \to \overline{(\bar{A} \wedge C)}$*?*

1) $A \wedge B \wedge \bar{C}$
2) $A \vee B \vee \bar{C}$
1) $\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$
2) $A \wedge B \wedge C$

10) Какое логическое выражение равносильно выражению $\overline{((A \vee B) \wedge (A \vee C))}$?

1) $A \vee \bar{B} \wedge \bar{C}$ *1)* $\bar{A} \wedge (\bar{B} \vee \bar{C})$

2) $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$ *2)* $\bar{A} \wedge \bar{B} \vee \bar{C}$

11) Составьте логическое выражение. Определите, кто из спортсменов участвовал в соревнованиях. Известно, что:

1. Если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал.
2. Если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

12) В нарушении правил игры в гандбол подозреваются четыре спортсмена — A, B, C, D. Известно, что:

1. Если A нарушил, то и B нарушил правила игры.
2. Если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушил.
3. Если D не нарушил, то A нарушил, а C не нарушил.
4. Если D нарушил, то и A нарушил.

Сколько спортсменов нарушили правила игры в гандбол.

В ответе необходимо указать только число.

13) Маму школьника вызвали в школу. Она точно помнит что:

1. Ее вызывали учителя физкультуры, математики, литературы и биологии.
2. Имена учителей Дина Давыдовна, Галина Георгиевна, Татьяна Тихоновна, Клавдия Константиновна.
3. Кабинеты вызвавших ее учителей расположены на первом, втором, третьем и четвертом этажах.
4. Кабинет биологии не на первом этаже.
5. Чтобы попасть из кабинета математики в кабинет литературы, необходимо спуститься на один этаж.
6. Кабинет биологии ниже кабинета литературы.
7. Кабинет Дины Давыдовны не ниже третьего этажа.
8. Кабинет Галины Георгиевны выше третьего этажа.
9. Татьяна Тихоновна не математик и не биолог.

Помогите маме установить, какого учителя как зовут.

В ответе расположите первые буквы имен учителей в следующем порядке: учитель биологии, преподаватель математики, педагоги по литературе, физкультуре. Например, если бы преподавателей (в соответствующем порядке) звали Ирина Игоревна, Анна Александровна, Зинаида Зурабовна и Вера Владимировна, ответ был бы: ИАЗВ.

14) Четыре девушки — Нина, Аня, Света, Ира — вошли в четверку лучших перед финальным заплывом на 100 м.

Болельщики высказали свое предположение о распределении мест в финале.

Один из болельщиков на второе место прочит Свету, а Ира, по его мнению, займет четвертое место.

Второй считает, что первой будет Аня, а Нина — второй.

Другой с ними не согласился. Он считает, что Аня будет второй, а Ира займет третье место.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов.

Какие места заняли Нина, Аня, Света, Ира? (В ответе перечислите подряд без пробелов места девушек в указанном порядке имен.)

Тема 1.3 Математические доказательства

Практическое занятие: Применение способов обоснования истинности высказывания для решения профессиональных задач

Цель работы: уметь решать профессиональные задачи, используя формулы алгебры логики.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.1, ОК.2, ПК. 3.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

1. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ: учебник. / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник. / А.А.Дадаян. – 3-е изд. – М.: ФОРУМ, 2015. – 544 с.

Теоретический материал:

1. Способы математического доказательства

В обыденной жизни часто, когда говорят о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. В математике проверка и доказательство – это разные вещи, хотя и связанные между собой. Пусть, например, требуется доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник.

Если мы возьмем какой-либо четырехугольник, у которого три угла прямые, и, измерив четвертый, убедимся в том, что он действительно прямой, то эта проверка сделает данное утверждение более правдоподобным, но еще не доказанным.

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный четырехугольник, в котором три угла прямые. Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов 360^o, то и в данном она составляет 360^o. Сумма трех прямых углов равна 270^o ($90^o \bullet 3 = 270^o$), и, значит, четвертый имеет величину 90^o (360^o - 270^o). Если все углы четырехугольника прямые, то он – прямоугольник Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

Заметим, что сущность проведенного доказательства состоит в построении такой последовательности истинных утверждений (теорем, аксиом, определений), из которых логически следует утверждение, которое нужно доказать.

Вообще ***доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.***

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние.

Таким образом, основой математического доказательства является дедуктивный вывод. А само доказательство – это цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.

Например, в приведенном выше доказательстве можно выделить следующие умозаключения:

1. В любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360^o; данная фигура – выпуклый четырехугольник, следовательно, сумма углов в нем 360^o.

2. Если известна сумма всех углов четырехугольника и сумма трех из них, то вычитанием можно найти величину четвертого; сумма всех углов данного четырехугольника равна 360^o, сумма трех 270^o ($90^o \bullet 3 = 270^o$), то величина четвертого $360^o - 270^o = 90^o$.

3. Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник; в данном четырехугольнике все углы прямые, следовательно, он прямоугольник.

Все приведенные умозаключения выполнены по правилу заключения и, следовательно, являются дедуктивными.

Самое простое доказательство состоит из одного умозаключения. Таким, например, является доказательство утверждения о том, что $6 < 8$.

Итак, говоря о структуре математического доказательства, мы должны понимать, что она, прежде всего, включает в себя утверждение, которое доказывается, и систему истинных утверждений, с помощью которых ведут доказательство.

Следует еще заметить, что математическое доказательство – это не просто набор умозаключений, это умозаключения, расположенные в определенном порядке.

По способу ведения (по форме) различают ***прямые и косвенные*** доказательства. Рассмотренное ранее доказательство было прямым – в нем, основываясь на некотором истинном предложении и с учетом условия теоремы, строилась цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводила к истинному заключению.

Примером косвенного доказательства является доказательство ***методом от противного***. Сущность его состоит в следующем. Пусть требуется доказать теорему

$A \Rightarrow B$. При доказательстве методом от противного допускают, что заключение теоремы (B) ложно, а, следовательно, его отрицание истинно. Присоединив предложение «не B» к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию A. Как только такое противоречие устанавливают, процесс доказательства заканчивают и говорят, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы

$A \Rightarrow B$.

Задача 1. Доказать, что если $a + 3 > 10$, то $a \neq 7$. Метод от противного.

Задача 2. Доказать, что если x^2 - четное число, то x – четно. Метод от противного.

Задача 3. Даны четыре последовательных натуральных числа. Верно ли, что произведение средних чисел этой последовательности больше произведения крайних на 2? Метод неполной индукции.

Полная индукция – это такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Задача 4. Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.

Задача 5. Верно ли, что если натуральное число n не кратно 3, то значение выражения $n^2 + 2$ кратно 3? Метод полной индукции.

Основные выводы

В этом пункте познакомились с понятиями: умозаключение, посылка и заключение, дедуктивные (правильные) умозаключения, неполная индукция, аналогия, прямое доказательство, косвенное доказательство, полная индукция.

Мы выяснили, что неполная индукция и аналогия тесно связаны с дедукцией: выводы, полученные с помощью неполной индукции и аналогии, надо либо доказывать, либо опровергать. С другой стороны, дедукция не возникает на пустом месте, а является результатом предварительного индуктивного изучения материала.

Дедуктивные умозаключения позволяют из уже имеющегося знания получать новые истины, и притом с помощью рассуждения, без обращения к опыту, интуиции и т.д.

Мы выяснили, что математическое доказательство – это цепочка дедуктивных умозаключений, выполняемых по определенным правилам. Познакомились с простейшими из них: правилом заключения, правилом отрицания, правилом силлогизма. Узнали, что проверять правильность умозаключений можно с помощью кругов Эйлера.

2. Разбор задач с решением

2.1. Равносильны ли высказывания?

1. $\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$ и $a \Rightarrow b$
2. $bc \vee \overline{a}$ и $\overline{b} \vee \overline{c} \vee a$
3. $\overline{a} \Rightarrow b$ и $\overline{b} \Rightarrow a$

Исходя из разговорной практики, мы знаем, что, имея высказывания A и B, можно построить высказывания: не A (неверно, что A); A и B; A или B; если A, то B (из A следует

B); A только и только тогда, когда B (A эквивалентно B, A тождественно B).

Эти высказывания, в отличие от элементарных, естественно назвать сложными, поскольку они уже наделены структурой. Однако они так же, как и простые, могут принимать только два возможных значения: И либо Л.

2.2. Среди следующих высказываний укажите составные; выделите в них простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание:

1. «Пришла весна, и грачи прилетели».

Решение задачи:

Обозначим через А-«пришла весна»; а через В- «грачи прилетели». Тогда высказывание

С -«Пришла весна, и грачи прилетели» запишем так: $C = A \wedge B$.

Ответ: : $C = A \wedge B$.

2. «Число 6 делится на 2 и число 6 делится на 3».

3. « Неверно, что 4 делится на 3». Обозначим через a простое высказывание «4 делится на 3». Представьте первое высказывание в виде логической формулы.

4.Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.

5.Земля имеет форму шара.

6.На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя и писали самостоятельную работу.

7.Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.

8.Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

9. Число 376 четное и трехзначное.

10. 1) «Летом я поеду в деревню или в туристическую поездку».

2) «Летом я поеду в деревню или в туристическую поездку, или в санаторий»

3) «Если летом я поеду в деревню, то я не поеду в туристическую поездку»

4) «Если летом я не поеду в деревню или в санаторий, то я поеду в туристическую поездку».

5) ««Если летом я поеду в деревню или в санаторий, то я не поеду в туристическую поездку».

2.3. Решить задачи средствами алгебры логики.

Задача. В процессе составления расписания уроков учителя высказали свои пожелания. Учитель русского языка хочет проводить первый или второй урок, учитель математики – первый или третий, а учитель физкультуры – второй или третий урок. Сколько существует возможных вариантов расписания и каковы они?

Решение. Введем обозначения: A – 1-й урок русского языка, B – 2-й урок русского языка, $\overline{A}$- 1-й урок математики, C – 3-й урок математики, $\overline{B}$- 2-й урок физкультуры, $\overline{C}$ - 3-й урок физкультуры. Составим логическую формулу, опираясь на условие задачи: (AvB) & ($\overline{A}$v C) & ($\overline{B}$v$\overline{C}$). Таблица истинности для нее будет иметь вид:

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$A \vee B$	$\bar{A} \vee C$	$\bar{B} \vee \bar{C}$	$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee \bar{C})$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0

Ответ. Анализируя таблицу, приходим к выводу, что расписание может быть представлено в двух вариантах:

1 урок математика   1 урок русский язык
2 урок русский язык   или   2 урок физкультура
3 урок физкультура   3 урок математика.

Тренировочные упражнения:

№ задания	***Задача***
1	Только один из спортсменов участвовал в соревновании. Известно, что если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал; если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал. Кто участвовал в соревновании?
2	Аня, Вика и Сергей могут поехать на сборы. Тренер, хорошо знавший ребят, высказал предложения: Аня пойдет поедет только тогда, когда поедут Вика и Сергей; Аня и Сергей поедут на сборы вместе или же оба останутся дома; чтобы Сергей поехал на сборы, необходимо, чтобы поехала Вика. Когда ребята поехали на сборы, оказалось, что тренер немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из ребят поехал на сборы?
3	Намечаются экскурсии в три города А, В и С. Классный руководитель сказал: «Неверно, что если будет экскурсия в город В, то не будет экскурсии в город С. Если будет экскурсия в город С, то не будет экскурсии в город А.» В какие города будет проводиться экскурсия?
4	Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстощего этапа гонок. — Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл. — Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым. Питер, к которому обратился Ник, возмутился: — Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину. По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?
5	Для проведения соревнований на открытом воздухе погода должна быть хорошей. Представим такую ситуацию: по телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее: 1.Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя. 2.Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра. 3.Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

№ задания	Задача
	Так какая же погода будет завтра?
6	Вадим, Сергей и Михаил занимаются различными видами спорта: футбол, волейбол и гандбол. На вопрос, каким видом спорта занимается каждый из них, один ответил: "Вадим играет в футбол, Сергей не играет в футбол, а Михаил не играет в гандбол". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Каким видом спорта занимается каждый из молодых людей?
7	Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на Олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа: 1) Сергей - первый, Роман - второй; 2) Сергей - второй, Виктор - третий; 3) Юрий - второй, Виктор - четвертый. Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?
8	Андрею, Саше и Егору болельщики на автогонках. Во время соревнований мимо них промчался автомобиль. Андрей сказал, что это был синеий Мерседес, Саша сказал, что это был черный Джип, а Егор утверждал, что это был Форд Мустанг и ни в коем случае не синий. Затем стало известно, что каждый из них указал правильно либо марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета и какой марки была машина?
9	В нарушении правил игры в гандбол подозреваются четыре спортсмена — A, B, C, D. Известно, что: 1. Если A нарушил, то и B нарушил правила игры. 2. Если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушил. 3. Если D не нарушил, то A нарушил, а C не нарушил. 4. Если D нарушил, то и A нарушил. Сколько спортсменов нарушили правила игры в гандбол. В ответе необходимо указать только число.
10	Четыре девушки — Нина, Аня, Света, Ира — вошли в четверку лучших перед финальным заплывом на 100 м. Болельщики высказали свое предположение о распределении мест в финале. Один из болельщиков на второе место прочит Свету, а Ира, по его мнению, займет четвертое место. Второй считает, что первой будет Аня, а Нина — второй. Другой с ними не согласился. Он считает, что Аня будет второй, а Ира займет третье место. Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов. Какие места заняли Нина, Аня, Света, Ира?

Раздел 2. Матрицы. Методы решения систем линейных уравнений

Практическое занятие: действия с матрицами

Цель работы: уметь выполнять действия с матрицами.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.2, ОК.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

1. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ: учебник. / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник. / А.А.Дадаян. – 3-е изд. – М.: ФОРУМ, 2015. – 544 с.

Теоретический материал:

Матрицы. Операции над матрицами.

Матрицей **m x n** называется прямоугольная таблица, состоящая из **m** строк и **n** столбцов. Числа таблицы называют элементами матрицы и обозначают $\mathbf{a_{ij}}$, первый индекс - номер строки, а второй номер столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{(m\times n)},$$

$$i = 1, \ldots m, \ j = 1, \ldots n.$$

Виды матриц

1. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ — диагональная матрица 3-го порядка.

2. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной** и обозначается буквой *E* или *I*.

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — единичная матрица 3-го порядка.

3. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается буквой *O*.

4. Квадратная матрица называется **верхней треугольной**, если все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — верхняя треугольная матрица.

5. Квадратная матрица называется **нижней треугольной,** если все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю. Например,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ — нижняя треугольная матрица.

6. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (**вектор-столбцом или вектор-строкой соответственно). **Н**апример,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ .a_m \end{pmatrix} \qquad B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.
Например, A=(4)1 1 есть число 4.

1.2. Действия над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}).$$

Обозначение: $C = A + B$.

Пример. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & -2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

1. Переместительное свойство:

$$A + B = B + A.$$

2. Сочетательное свойство:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

2. Умножение матриц на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на вещественное число λ называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$, такая, что

$$b_{ij}=\lambda a_{ij} \quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}).$$

Пример. Умножить матрицу $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$ на число 3.

Решение:

$$3\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9 & 3\\ 15 & 0 & 12\end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число

1. Сочетательное свойство относительно числового сомножителя:

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A).$$

2. Распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

3. Распределительное свойство относительно суммы чисел:

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$$

3. Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$, такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{in}\cdot b_{nk}$$

$$(i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p}).$$

Обозначение: $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

Операция умножения двух матриц определяется только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Пример. Найти произведение матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot4 & 2\cdot0+1\cdot2 & 2\cdot3+1\cdot1\\ 3\cdot1+4\cdot4 & 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot3+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 7\\ 19 & 8 & 13\end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц

1. Перестановочное свойство в общем случае не выполняется:

$$AB\neq BA.$$

2. Сочетательное свойство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3. Распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$(A+B)C=AC+BC \text{ или } A(B+C)=AB+AC.$$

4. Если A — квадратная матрица, а E — единичная матрица того же порядка, что и A, то

$$EA=AE=A.$$

Замечание

Если $AB = BA$ то матрицы A и B называют **перестановочными** или **коммутирующими**.

4. Транспонирование матриц

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** к данной.

Обозначение: A^T.

Пример. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Решение: $A^T=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования

1) $(A^T)^T=A$;

2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Решение задач

Решить ***1.1.3, 1.1.4, 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8***

1.1.1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

❍ $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&-2\end{pmatrix}+$
$+\begin{pmatrix}-6&9&0\\6&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6&4+9&6+0\\0+6&2+3&-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&13&6\\6&5&1\end{pmatrix}$. ●

Найти линейные комбинации заданных матриц:

1.1.2. $A-\lambda E$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

1.1.3. $4A-5B$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&4&-2\\-3&1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\-2&1&3\\0&2&-4\end{pmatrix}$.

1.1.4. $3A+4B$, $A=\begin{pmatrix}7&-2&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&3&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&-3&1\\7&-1&0&4\\8&-2&1&5\end{pmatrix}$.

1.1.5. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&5\\6&0&-2\\7&1&8\end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

❍ $AB=\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 3}\\1\quad 0\quad -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}}&\begin{matrix}4\\0\\1\end{matrix}&\begin{matrix}5\\-2\\8\end{matrix}\end{pmatrix}=$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается}\\ \text{к первому столбцу матрицы } B,\\ \text{соответствующие элементы перемножаются,}\\ \text{а произведения складываются}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7}&1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1&1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7&1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1&1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36&7&25\\-4&3&-3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3\neq2)$. ●

Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют):

1.1.6. $A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$.

1.1.7. $A=(4\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ 1)$, $B=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$.

1.1.8. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&6\\-1&-3\end{pmatrix}$.

1.1.9. $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$.

Практическое занятие: решение матричных уравнений

Цель работы: уметь решать матричные уравнения в профессиональной деятельности.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.3, ОК.5.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев С.Г. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина : под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2021. – 416 с.
- Дадаян А.А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2021. — 544 с.

Теория

§ 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

⇛ *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственна.

⇛ *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 1.3. Если квадратная матрица A — невырожденная (т. е. $\det A \neq 0$), то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}. \qquad (4.1)$$

Метод присоединенной матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в применении формулы (4.1).

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу размера $n \times n$, получим прямоугольную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы Γ сначала приведем ее к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, где матрица A_1 — треугольная, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$AX = B, \qquad (4.2)$$

$$XA = B, \qquad (4.3)$$

$$AXC = B. \qquad (4.4)$$

1.4.9. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

○ 1) Найдем $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Матрица A^{-1} существует, только если $\det A \neq 0$.

2) Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{21}, \quad A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}.$$

3) Запишем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Итак, для матрицы 2-го порядка присоединенная матрица находится очень просто — элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на (-1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{22}} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathbf{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$ ●

Найти обратную матрицу, используя результаты задачи 1.4.9:

1.4.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.14. Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

❍ Записывая матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II} + \mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \; ●$$

Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

1.4.15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.27. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$ ●

1.4.28. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AXC = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}BC^{-1}$ (если матрицы A^{-1} и C^{-1} существуют).

1) Найдем определители матриц A и C:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матрицы A и C невырождены, значит, существуют обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \widetilde{C} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$ ●

Решить матричные уравнения:

1.4.29. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.30. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.31. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.32. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.4.33. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие: решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: уметь решать системы линейных уравнений методом Гаусса

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.1, ОК.2, ОК.5

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев С.Г. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина : под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2021. – 416 с.
- Дадаян А.А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2021. — 544 с.

§ 3. РАНГ МАТРИЦЫ

⇛ ***Минором k-го порядка*** произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

— 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right), \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\right),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right);$$

— 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix};$$

— 1-го порядка

$$|2| \ (\text{минор } |a_{12}|), \ |3| \ (\text{минор } |a_{13}|), \ |-7| \ (\text{минор } |a_{34}|).$$

⇛ ***Рангом матрицы*** A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: $r(A)$, $\text{rang}(A)$.

⇛ ***Базисным минором*** называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определенна она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n — число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы $(A|B)$ к ступенчатому виду $(A'|B')$:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1k_2} & \dots & a'_{1k_r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2k_2} & \dots & a'_{2k_r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{rk_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

где в i-ой строке ($i = 1, 2, \dots, r$) самый левый ненулевой элемент обозначен через a_{ik_i}.

Полученной расширенной матрице $(A'|B')$ соответствует система линейных уравнений, эквивалентная системе (1.1). При этом $r(A') = r(A)$, $r(A'|B') = r(A|B)$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и определенна (неопределенна) верны и для системы (1.1).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ не равно нулю, то $r(A'|B') > r(A')$, и система несовместна; иначе (если $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$) система совместна. В случае, когда система совместна, будет $r(A') = r(A'|B') = r$, где r — число ненулевых строк матриц A' и $(A'|B')$. Если $r = n$ (где n — число неизвестных), то система определенна, в противном случае (если $r < n$) система неопределенна.

2.1.1. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

❍ Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)_{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система совместна*. Количество неизвестных также равно 2:

$$n = r(A) = r(A|B) = 2,$$

значит, *система определенна*, т. е. имеет единственное решение. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 3$; подставляя это значение в первое уравнение, получим $x_1 = 2$.

Итак, общее решение (оно же единственное частное): $(2;3)$.
Ответ. система совместна и определенна; общее решение $(2;3)$; частное решение $(2;3)$. ●

2.1.2. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

○ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то *система совместна и неопределенна* (т. е имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы — 1-й и 2-й столбцы матрицы A — соответствуют переменным x_1 и x_2 — это будут *главные переменные*, а x_3 — *свободная переменная*. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим *общее решение системы*: $(-t - 8; 2t + 4; t)$. *Частное*

Решение получим, при t=0: (-8;4;0)

Ответ: система совместна и неопределена. (-t-8;2t+4;t) общее решение

2.1.4. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 - \ x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \ 0, \\ -2x_1 \qquad - 2x_3 = \ 3. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B),$$

то *система несовместна* (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13$, не имеющее решений.

Ответ. система несовместна. ●

Процесс преобразования расширенной матрицы системы к ступенчатому виду является методом Гаусса при решении СЛУ. Этот метод позволяет решить СЛУ любого вида, особенно он удобен, когда определитель матрицы системы равен 0, и формулы Крамера не работают.

Пример. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1 этап. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 этап. Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + 2.$$

Подставим x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + 1.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 + 1, \\ x_2 = \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 + 2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

Упражнения

Исследовать СЛУ, для совместных систем найти общее и одно частное решение

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x + y - 3z = 6 \\ 3x - y - z = 2 \\ 2x + y - 9z = 18 \end{cases}$

3 $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$$

4 $$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

Практическое занятие: *Решение СЛУ, полученных при исследовании данных в профессиональной деятельности*

Цель работы: уметь решать СЛУ в профессиональной деятельности.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: , ОК.2, ОК.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев С.Г. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина : под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2021. – 416 с.
- Дадаян А.А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2021. — 544 с.

Другую форму записи этого утверждения дают ***формулы Крамера***:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

2.2.1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3.$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определитель D_1, подставляя в определитель D вместо первого столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ столбец свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 7 = 6.$$

Определитель D_2 получается из D подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-1) \cdot 2 = 9.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{3} = 2; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ. $(2; 3)$.

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -6. \end{cases}$

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad \text{(см. пример 1.4.1).}$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Найдем определители D_1, D_2 и D_3 подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя Δ соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 + 3 \cdot (72 + 30) =$$
$$- 288 - 72 + 306 = -360 + 306 = -54,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 36 - 6 \cdot (-42) + 3 \cdot (-24 - 63) = 36 + 252 + 3 \cdot (-87) =$$
$$= 288 - 261 = 27,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-30 - 72) - 2 \cdot (-24 - 63) + 6 \cdot (32 - 35) =$$
$$= -102 - 2 \cdot (-87) + 6 \cdot (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-54}{27} = -2,$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{27} = 1,$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{54}{27} = 2.$$

Ответ. $(-2; 1; 2)$.

1. Какие из следующих систем решаются по правилу Крамера?

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

2. Решите следующие системы по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ -2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и формулы Крамера. Указать те значения параметров (a и b), при которых указанными методами систему решить невозможно:

2.2.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$ **2.2.5.** $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 11, \\ 4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0. \end{cases}$

2.2.6. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$ **2.2.7.** $\begin{cases} ax + by = f_1, \\ cx + dy = f_2. \end{cases}$

2.2.8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$ **2.2.9.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$

2.2.10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$ **2.2.11.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases}$

2.2.12. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

Раздел 3.. Комбинаторика, элементы теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1 Комбинаторика

Практическое занятие: Применение комбинаторики для решения профессиональных задач

Цель работы: уметь решать комбинаторные задачи в профессиональной деятельности.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, ОК.2, ОК.4.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев С.Г. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина : под ред. В.А. Гусева. – 13-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2017. – 416 с.
- Дадаян А.А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 544 с.

Комбинаторика.

Комбинаторика – это область математики, в которой изучаются различные комбинации элементов дискретных (в основном – конечных) множеств, подчиненных тем или иным условиям.

Основные задачи, обозначения и правила.

Среди многочисленных проблем, решаемых средствами комбинаторики, основное внимание уделим следующим задачам.

1. Выбор из некоторого, обычно конечного, множества некоторого подмножества (комбинации) элементов, обладающих заданными свойствами.

2. Подсчет числа таких комбинаций.

3. Определение элемента комбинации, обладающего оптимальными свойствами.

Введем следующие понятия и обозначения.

n-множество – множество из n различных элементов:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad x_i \neq x_j, \text{ при } i \neq j.$$

(*n*)-*множество* – множество, содержащее n различных типов элементов:

$$X = \{x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n\}.$$

r-выборка множества – совокупность из r элементов данного множества (если выборка из n-множества, то повторяющихся элементов нет, если из (n)-множества, то есть повторения).

Размещения – упорядоченные r-выборки (элементы прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$).

Сочетания – неупорядоченные r-выборки (r-элементные подмножества данного множества).

Пример 1.

а) На диске секретного замка 12 букв. Замок открывается после набора пароля из 5 букв.

В пароле буквы могут повторяться. Следовательно, каждый пароль – это 5-размещение из (12)-множества, т.е. размещение с повторениями.

б) Из 25 человек, членов комитета, надо выбрать: председателя, вице-председателя, секретаря и казначея (4 человека). Совмещение должностей не допускается.

В задаче повторение элементов невозможно, т.к. не допускается совмещение должностей. Кроме того, в данной 4-выборке важен порядок выбора, т.к. надо не просто выбрать заданное число человек, но необходимо связать каждого выбранного с определенной должностью. Следовательно, здесь речь идет о размещении без повторений.

в) Из 125 человек надо выбрать 6 делегатов на конференцию.

В данном случае порядок выбора не играет роли, следовательно, имеет место 6-сочетание из 125-множества.

Многие простые задачи комбинаторики решаются с помощью двух основных аксиоматических правил.

1. ***Правило суммы.*** Если все комбинации можно разбить на несколько непересекающихся классов, то общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах:

$$\left|\bigcup_i X_i\right| = \sum_i |X_i|.$$

2. ***Правило произведения.*** Пусть объект А можно выбрать n способами, а при каждом таком выборе объект В можно выбрать m способами. Тогда выбор упорядоченной пары (А, В) можно сделать n·m способами. В общем случае:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_k|.$$

На практике оба правила часто используются в комбинации.

Пример 2. Сколькими способами можно из 28 костей домино выбрать 2 кости, которые можно приложить друг к другу?

Решение. 1-ю кость можно выбрать 28-ю способами. Из них в 7 случаях кость будет дублем, а в 21 случаях – с различными числами. Если 1-я кость является дублем, 2-ю кость можно выбрать 6-ю способами, а если – нет, то 12-ю способами. В соответствии с правилами суммы и произведения общее число случаев равно N = 7·6 + 21·12 = 294.

Основные комбинаторные конфигурации и формулы комбинаторики.

1. ***Размещения с повторениями.*** Так называются упорядоченные r-выборки из (n)-множества.

Дадим более подробное определение. Пусть дано неограниченное число предметов, относящихся к n различным видам. r-размещениями с повторениями называются различные расстановки из этих предметов по r штук в каждой, образованные по следующим правилам.

а). 2 расстановки считаются различными, если они отличаются либо видом входящих в них предметов, либо порядком следования этих видов.

б). В каждую расстановку может входить несколько предметов одного вида.

Свойство. Число r-размещений с повторениями из предметов n типов обозначается $A^r_{(n)}$ и равно n^r.

Доказательство. На 1-м месте может быть предмет одного из n видов. Следовательно, существует n способов выбрать 1-й предмет. При каждом фиксированном таком способе имеется n способов выбрать 2-й предмет, и т.д. В соответствии с правилом произведения всю группу из r предметов можно выбрать n^r способами, что и требовалось доказать.

В примере 1.а) существует $12^5 \approx 250$ тыс. различных паролей. (Если взломщик будет тратить по 1 секунде на проверку комбинации, то ему понадобиться 69 часов для проверки всех паролей).

Пример 3. В азбуке Морзе самый длинный код буквы состоит из 5 символов. Можно ли использовать коды длиной не более 4-х символов?

Решение. В соответствии с правилом суммы число различных кодов длиной не более 4 символов при использовании 2 видов символов (точка и тире) равно $A^1_{(2)} + A^2_{(2)} + A^3_{(2)} + A^4_{(2)}$ = 2 + 4 + 8 + 16 = 30. Значит, 4-х символьных кодов не хватит для кодирования даже всех букв кириллицы, не говоря о служебных символах. При использовании же 5-ти символьных кодов N = 30 + $A^5_{(2)}$ = 62, т.е. такой длины кода достаточно.

2. ***Размещения и перестановки без повторений.*** *Размещениями без повторений* называются упорядоченные r-выборки из n-множества. Такие расстановки по r элементов составляются из n неповторяющихся предметов.

Свойство. Число r-размещений без повторений из n предметов обозначается A_n^r и равно $n\cdot(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Доказательство. 1-й предмет можно выбрать n способами, 2-й – (n – 1) способами, т.к. число кандидатов на это место уже n – 1, и т.д. В соответствии с правилом произведения получаем выражение из r сомножителей:

$$A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1)\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

В примере 1.б) число способов выбора 4-х членов в руководство комитета из 25 человек равно $A_{25}^4 = 25\cdot24\cdot23\cdot22 = 303600$.

В частном случае при r = n получаем $A_n^n = P_n = n!$ Данная конфигурация называется *перестановкой* из n неповторяющихся предметов – упорядоченная n-выборка из n-множества.

3. ***Перестановки с повторениями.*** Так называют упорядоченные n-выборки из (m)-множества (n > m). Если некоторые элементы такой выборки совпадают, то могут существовать неразличимые (совпадающие) перестановки.

Найдем количество различных перестановок. Обозначим a, b,…, z – переставляемые объекты; n_j – количество повторений j-го элемента, j = 1,…,m, $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$; $P(n_1, n_2,\ldots, n_m)$ – число таких перестановок. Рассмотрим 1-ю перестановку:

$$\underbrace{a,a,\ldots,a}_{n_1 \text{ элементов}},\quad \underbrace{b,b,\ldots,b}_{n_2 \text{ элементов}},\quad \ldots\quad \underbrace{z,z,\ldots,z}_{n_m \text{ элементов}}.$$

Объекты “a” можно переставлять $n_1!$ способами, но поскольку все они одинаковы, то такие перестановки не дают новых комбинаций. Следовательно, число действительно различных перестановок за счет совпадения первых n_1 элементов будет в $n_1!$ раз меньше, чем в случае всех различающихся элементов. Аналогично, совпадение n_2 элементов “b” уменьшает число различных перестановок в $n_2!$ раз, и т.д. Поскольку при несовпадении всех n элементов количество перестановок было бы равно n!, то

$$P(n_1, n_2,\ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_m!}.$$

Пример 4. Найти все перестановки букв в слове “мама”.

Решение. В данном слове есть объекты 2-х типов – “м” и “а”. Всего множество содержит 4 элемента. Следовательно, число перестановок равно $P(2,2) = \frac{4!}{2!\cdot2!} = 6$. Действительно, имеем следующие комбинации: ”аамм”, “мама”, “амам”, “ммаа”, “амма”, “маам”.

Пример 5. Найти число перестановок букв в слове “Миссисипи”.

Решение. Длина этого слова – 9 букв. Из них буква “м” встречается 1 раз, “и” – 4 раза, “с” – 3, “п” – 1. Следовательно, число перестановок равно

$$P(1, 4, 3, 1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = 2520.$$

4. ***Сочетания без повторений.*** Так называются неупорядоченные r-выборки из n-множества (r < n).

Свойство. Число r-сочетаний без повторений из n предметов обозначается C_n^r и равно $\frac{A_n^r}{r!}$.

Доказательство. Каждое неупорядоченное r-сочетание можно упорядочить r! способами и получить r-размещение. Следовательно, сочетаний в r! раз меньше, чем размещений, т.е.

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = P(r, n-r).$$

В примере 1.в) 6 делегатов из 125 человек можно выбрать $C_{125}^6 = \frac{125!}{6!\cdot 119!} = \frac{125\cdot 124\cdot 123\cdot 122\cdot 121\cdot 120}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 4.691\cdot 10^9$ способами

Пример 6. В лотерее из 36 номеров будут выбраны 5. Какова вероятность угадать ровно 3 номера из 5?

Решение. 3 номера из 5 верных можно выбрать C_5^3 способами. На каждый угаданный номер могут приходиться любые 2 из 31 невыбранных номеров, т.е. C_{31}^2 сочетаний. Окончательное число благоприятных случаев равно $C_5^3\cdot C_{31}^2$. Общее же число случаев равно количеству выпадения 5 номеров из 36, т.е. C_{36}^5.

Отсюда вероятность угадывания равна $\frac{C_5^3\cdot C_{31}^2}{C_{36}^5} \approx 0.0123$ – немногим более 1%.

5. ***Сочетания с повторениями.*** Это неупорядоченные r-выборки из (n)-множества. Они получаются, например, если необходимо r неразличимых предметов разместить по n ящикам, в частности возможно n > r.

Свойство. Число r-сочетаний с повторениями из n предметов обозначается $C_{(n)}^r$ и равно C_{n+r-1}^r.

Доказательство. Обозначим $r_j \geq 0$ – количество элементов j-го типа в сочетании, $\sum_{j=1}^{n} r_j = r$ (r_j можно интерпретировать как количество предметов в j-м ящике). Набор значений r_j однозначно определяет текущее сочетание. Представим этот набор в виде следующей бинарной последовательности. Числа r_j отобразим в группы из r_j единиц, каждую такую группу отделим от соседних одним нулем (если $r_j = 0$, то несколько нулей могут стоять подряд). Число промежутков равно n – 1. Например, набор (2, 0, 3, 1), n = 4, r = 6 соответствует последовательности (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1).

Построенная конструкция – не что иное, как набор перестановок с повторениями объектов 2-х видов – 0 и 1. Число нулей в этих сочетаниях равно n – 1, а единиц – r. Следовательно, $C_{(n)}^r = P(r, n-1) = C_{n-1+r}^r$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Определить количество N возможных сочетаний из 8 пирожных 4-х сортов.

Решение. В данном случае r_j– число пирожных j-го сорта. Следовательно, r = 8, n = 4 и N = $C^8_{(4)} = C^8_{11}$ = 165.

Другой вариант доказательства основан на построении взаимно-однозначного отображения напрямую между элементами повторных и бесповторных сочетаний. Свяжем каждый набор $r_1, r_2, \ldots, r_n$ с элементами n – 1-сочетаний без повторений из множества чисел $\{1, 2,\ldots, n + r - 1\}$. Обозначим $К_j$, $j = 1,\ldots, n-1$– число, стоящее на j-м месте в отбираемом сочетании ($К_j > К_{j-1}$), формально положим $К_0 = 0$. Построим взаимно-однозначное отображение

$$f : (r_1, r_2, \ldots, r_n) \to (К_1, К_2, \ldots, К_{n-1})$$

по следующему правилу:

$$r_j = К_j - К_{j-1} - 1, \quad j = 1,\ldots, n - 1; \qquad (1.1)$$
$$r_n = (n + r - 1) - К_{n-1}.$$

Очевидно, обратное отображение строиться по формуле

$$К_j = \sum_{i=1}^{j} r_i + j, \quad j = 1,\ldots, n-1. \qquad (1.2)$$

Покажем, что числа, найденные по формулам (1.1) являются элементами r-сочетаний с повторениями. Действительно, т.к. $К_j - К_{j-1} \geq 1$ при любом j и $К_{n-1} \leq n + r - 1$, то $r_j \geq 0$. Кроме того

$$\sum r_j = (К_1 - К_0 - 1) + \ldots + (К_{n-1} - К_{n-2} - 1) + (n + r - 1 - К_{n-1}) = r.$$

Несложно также убедиться, что числа $К_j$, полученные по формуле (1.2) являются натуральными, и обладают всеми свойствами элементов сочетаний:

$$К_j - К_{j-1} = r_j + 1 \geq 1; \quad К_{n-1} = n + r - 1 - r_n \leq n + r - 1.$$

Следовательно, отображение f действительно устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами r-сочетания из (n)-множества и элементами n – 1-сочетания из n + r – 1-множества. Отсюда $C^r_{(n)} = C^{n-1}_{n+r-1} = C^r_{n+r-1}$. Последнее равенство вытекает из формулы числа сочетаний.

6. Сочетания и их свойства

Рассмотрим конечное множество из n элементов. Из этого множества можно составить различные подмножества с заданным числом элементов. Число всех подмножеств по m элементов в каждом, составленных из n элементов данного множества, называется *числом сочетаний из n элементов по m* и обозначается через C_n^m .

Например из множества $M = \{a, b, c\}$, состоящего из трех элементов, можно составить три двухэлементных подмножества: $\{a, b\}$, $\{a, c\}, \{b, c\}$ (заметим, что подмножества $\{a, b\}$ и , $\{b, a\}$ совпадают).

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по m равно отношению числа размещений из n элементов по m к числу перестановок m элементов:*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Число упорядоченных подмножеств из из n элементов по m равно A_n^m, а каждое такое упорядоченное подмножество образует некоторую перестановку из m элементов этого подмножества, причем из подмножества с m элементами можно получить всего P_m упорядоченных подмножеств с теми же элементами. Но, так как каждое сочетание не зависит от перестановки его элементов, то все упорядоченные подмножества с одними и теми же элементами соответствуют одному сочетанию. Поэтому, число подмножеств с m

элементами, полученных из множества с n элементами, дается следующей формулой: так как $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ и $P_m = m!$, то $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Подставим значения факториалов, получим:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot m}$$

В частности, при $m = 1$ величина $C_n^1 = n$. Условимся считать, что $C_0^1 = 1$ при всех n.

Пример 8. Сколько всего игр должны провести 16 футбольных команд в однокруговом чемпионате?

Решение. Так как всех команд 16, то $n = 16$. Но игра любой команды M с командой N совпадает с игрой команды N с командой M, поэтому каждая игра есть сочетание из 16 элементов по 2. Следовательно, все игр будет

$$C_{16}^2 = \frac{16\cdot 15}{2} = 120$$

Число сочетаний обладает следующими свойствами.

Справедливо равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Имеем $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Заменим m на $n-m$, получим

$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Поэтому $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Справедливо равенство

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Имеем

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot m} \text{ и } C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot m\cdot(m+1)}$$

Сложив эти равенства и приведя правые части к общему знаменателю, получим

$$C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(m+1) + n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot m\cdot(m+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(m+1+n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot m\cdot(m+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot m\cdot(m+1)} = C_{n+1}^{m+1}$$

С помощью равенства $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ можно последовательно вычислять значения C_n^m . сначала при $n = 0$, затем при $n = 1$, $n = 2$ и т.д.

Составим таблицу

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Эта таблица называется *треугольником Паскаля*, по имени известного французского математика Блеза Паскаля (1623-1662), исследовавшего ее свойства.

Формулы $C_n^m = C_n^{n-m}$ и $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ позволяют быстро заполнять треугольник Паскаля. В самом деле, из формулы $C_n^m = C_n^{n-m}$ следует, что числа в каждой строке треугольника Паскаля, равноудаленные от начала и конца, совпадают, а из формулы $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ — что каждое число следуещей строки равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих над данным числом справа и слева от него.

Типы комбинаторных задач.

Комбинаторные задачи бывают трех типов: перестановки, сочетания и размещения.

Рассмотрим их по попрядку.

1. Перестановки.

Рассмотрим решение задач.

Задача 10. На столе лежат яблоко, груша и банан. Выкладываем фрукты слева направо в следующем порядке:

яблоко / груша / банан

Вопрос первый: сколькими способами их можно переставить?

Одна комбинация уже записана выше и с остальными проблем не возникает:

яблоко / банан / груша

груша / яблоко / банан

груша / банан / яблоко

банан / яблоко / груша

банан / груша / яблоко

Итого: 6 комбинаций или 6 *перестановок.*

Задача 11. Имеются шары. Их всего 3 - желтый, красный и синий. Олег должен разложить их на полке всеми возможными способами. Ответ выглядит так:

Составляя комбинации, мы учитывали порядок шаров. И на первое, и на второе, и на третье место мы могли положить любой шар. Отсюда и такое разнообразие вариантов. Если в комбинациях участвуют все объекты и важен их порядок - речь идет о *перестановках*.

2. Сочетания.

При сочетаниях комбинаций, как правило, получается меньше, чем при перестановках и размещениях. Дело в том, что порядок элементов не важен, да и в комбинациях участвуют не все элементы. Давайте снова рассмотрим конкретный пример.

Задача 12. На полке лежат три шара - желтый, красный, синий. Учитель попросил Олега принести ему два шара. Сколькими способами Олег может это сделать?

Например, Олег возьмет желтый и красный шары:

А так ли важно, желтый и красный или красный и желтый? Это как при перемене мест слагаемых - сумма не меняется. Все равно Олег принесет именно эти шары учителю и не возьмет синий. Порядок шаров не имеет значения.

Оставшиеся способы выглядят так:

При сочетаниях не важен порядок элементов!

3. Размещения.

Задача 13. Из цифр 1,2,3,4,5,6 составить все возможные трехзначные числа.

При этом мы должны рассмотреть случаи:

1) когда цифры в записи числа повторяются;

2) когда цифры в записи числа не повторяются.

Размещение

Цифры повторя-

Цифры не повто-

Рассмотрим первый случай, когда цифры повторяются (размещение с повторением). Сколько цифр претендует на первое место? На второе место? На третье?

Отметим место каждой цифры

*   *   *

6 x 6 x 6 =216

Рассмотрим второй случай, когда цифры не повторяются (размещение без повторения). Сколько цифр претендует на первое место? На второе место? На третье?

Отметим место каждой цифры

*   *   *

6 x 5 x 4 =120

Задача 14. Сколько двузначных чисел можно получить из цифр 0, 1, 2, 3 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Решение: На первом месте могут стоять цифры 1, 2, 3. Тогда на втором месте в каждом случае могут стоять 3 цифры. Всего получаем 9 чисел: 10, 12, 13, 20, 21, 23, 30, 31, 32.

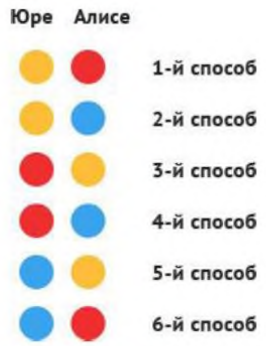
Размещением называется расположение «предметов» на некоторых «местах» при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

В размещении учитывается порядок следования предметов. Так, например, наборы (2,1,3) и (3,2,1) являются различными.

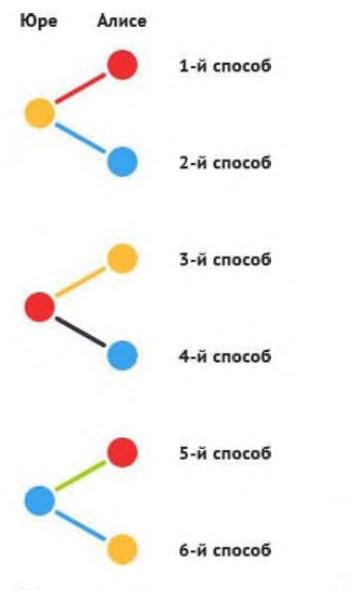
В этом типе задач комбинации составляют не из всех элементов, а только из некоторых. Но обязательно важен их порядок.

Снова наша задача с шарами, только теперь Учитель попросил Олега один шар отнести Юре, а другой — Алисе. Сколькими способами Олег может это сделать?

Можем изобразить комбинации вот так:



Или построить дерево вариантов:



В этом задании каждый раз участвовало только 2 шара, а не 3. Но при этом был важен их порядок.

В размещениях всегда участвует только часть элементов, но важен их порядок.

,Основные комбинаторные принципы.

Иногда подсчитать комбинации в задачах можно быстро и легко. Для этого используются правило суммы и правило произведения.

Правило суммы и правило произведения — основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике.

1. Правило суммы

Обобщения рациональных приемов систематического перебора целесообразнее начать с комбинаторных задач на правило суммы. Проиллюстрируем правило суммы на элементарных задачах.

Задача 15. В вазе 4 яблока и 3 груши. Сколькими способами можно взять из вазы один из фруктов?»

Решение:

- Что значит «взять 1 из фруктов? Это значит взять яблоко или грушу.
- Сколькими способами можно взять 1 яблоко? Почему? (Четырьмя способами, так как яблок всего 4 они разные).
- Сколькими способами можно взять 1 грушу и почему? (Тремя способами, так как груш всего 3 и они разные).

Сколькими способами можно взять один из фруктов? (Семью способами 7=4+3).

Ответ: 7 способов

Задача 16. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Решение. Понятно, что 10 + 4 + 6 = 20 способами.

Задача 17. На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

Решение. Яблоко можно выбрать пятью способами. Грушу можно выбрать тремя способами.

Т.е., один из этих фруктов можно выбрать 5 + 3 = 8 способами.

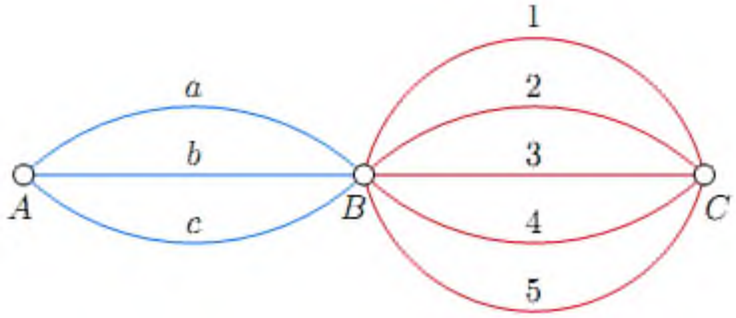
Правило суммы применяется, когда нужно выбрать один предмет из нескольких различных множеств.

2. Правило произведения.

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 18. Имеются три города: А, В и С. Из А в В ведут три дороги, из В в С — пять дорог. Сколько различных путей ведут из А в С? Прямого пути между А и С нет.

Решение. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из А в В назовем a, b, c; дороги из В в С назовѐм 1, 2, 3, 4, 5.



Тогда любой маршрут из А в С получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут b4 означает, что из А и В мы пошли по дороге b, а из В в С — по дороге 4. Выпишем все такие пары в виде таблицы: a1 a2 a3 a4 a5 b1 b2 b3 b4 b5 c1 c2 c3 c4 c5.

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно произведению числа дорог из А в В на число дорог из В в С.

Чтобы найти число комбинаций, достаточно перемножить число предметов одного вида на количество предметов другого вида. Это правило называется правилом произведения.

Задача 19. У Алисы есть 4 разных платья и 3 разных пары туфель. Она собирается на вечеринку и думает, что ей надеть. Сколько у Алисы вариантов?

Нам надо составить все возможные комбинации. В каждой из них будут участвовать и платье, и туфли.

Предположим, платье Алиса выбрала. Тогда к нему она может подобрать одну из 3-х пар туфель. Таким образом, есть 3 набора «платье-туфли» с этим первым платьем.

Поскольку платьев всего 4, то по правилу произведения 4*3=12. У Алисы 12 вариантов нарядов на вечеринку.

Использовать правило произведения - это, значит, умножить число одних элементов на количество комбинаций с ними.

Задача 20. В магазине «Все для чая» в продаже имеется 6 видов чашек, 5 видов блюдец и 3 вида ложек. Сколько можно составить разных комплектов из трех предметов: чашки, блюдца и ложки?

Ответ: 90 (6х5х3)

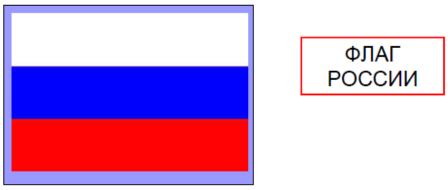
Задача 21. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Решение. Предположим, что пиджак уже выбран (это можно сделать 7 способами). К пиджаку выбираем брюки 5 способами. Итого пару (пиджак, брюки) можно выбрать $7 \cdot 5$ способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

Решение задач с помощью разных методов.

Одну и ту же задачу можно решить с помощью разных методов.

Задача 22. Учащимся раздали цветные полоски (белый, синий, красный) и предложили из них составить флаг Российской Федерации.



Но есть государства, где флаги имеют такие же цвета.

Видим, что от перестановок цветных полосок, можно получить другой флаг. Как подсчитать, сколько таких флагов мы можем составить из трех цветных полосок?

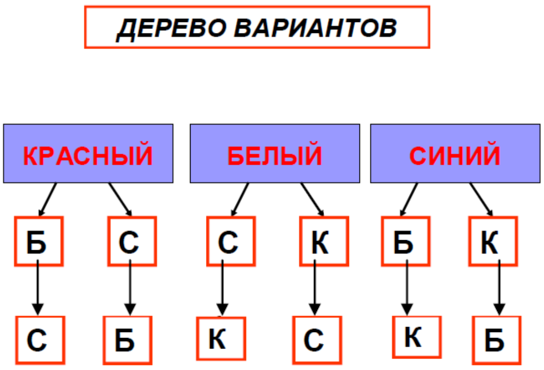
Решение этой задачи можно записать тремя способами:

1. Таблица вариантов.

КБС	КСБ
БСК	БКС
СБК	СКБ

Ответ: 6 способов

2. Дерево вариантов.



Ответ: 6 способов.

3. Правило умножения.

1 полоса 3 способа

2 полоса 2 способа

3 полоса 1 способ

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Ответ: 6 способов

Решение комбинаторных задач:

Правило умножения.

Задача 1. На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Вова может выбрать решение?

Решение. Соберем все варианты в таблице:

	Плюшка	*Бутерброд*	*Пряник*	*Кекс*

Кофе	Плюшка, кофе	Бутерброд, Кофе	Пряник, Кофе	Кекс, Кофе
Сок	Плюшка, сок	Бутерброд, Сок	Пряник, Сок	Кекс, Сок
Кефир	Плюшка, кефир	Бутерброд, Кефир	Пряник, Кефир	Кекс, Кефир

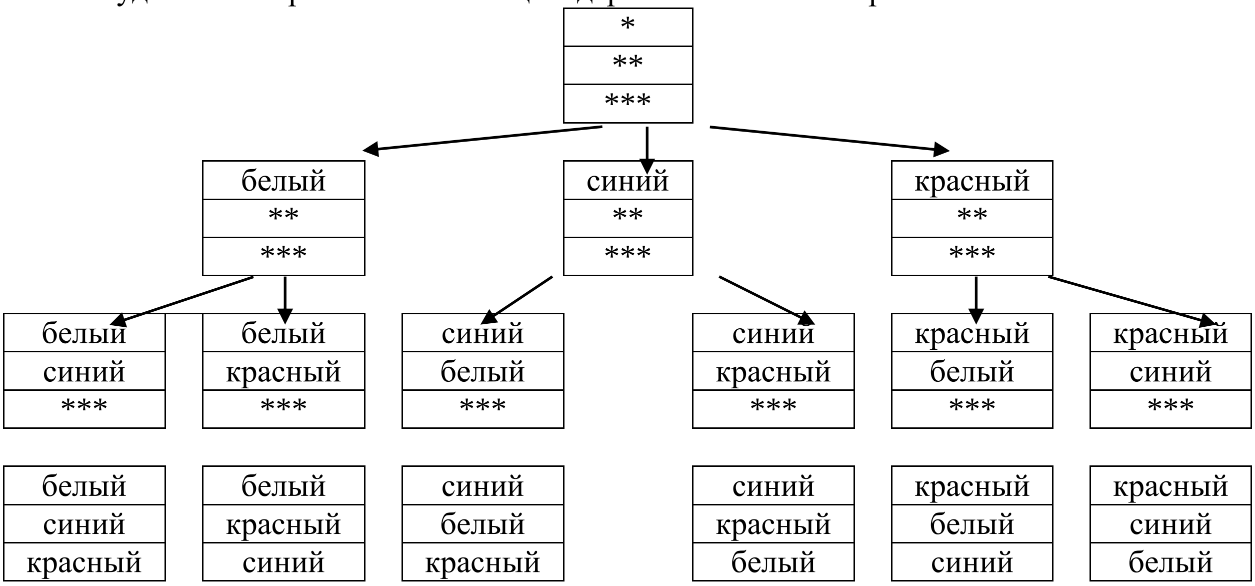
В ней три строки и четыре столбца, они образуют 12 клеток. Так выбор еды и напитка происходит независимо, то в каждой клетке будет стоять один из возможных вариантов завтрака. Значит, всего вариантов завтрака столько же, сколько клеток в таблице.

Ответ: 12.

Задача 2. Флаг России состоит из трех горизонтальных полос: белой, синей и красной. Флаг Франции состоит из тех же полос, но в другом порядке. Сколько всего различных флагов можно придумать из этих полос?

Решение.

Будем искать решение с помощью дерева возможных вариантов.



Ответ: 6.

Задача 3. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение:

Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 (15 = 5 • 3).

Ответ: 15.

Задача 4. В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение:

Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60 (60 = 15 • 4 = 5 • 3 • 4).

Ответ: 60.

Задача 5. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу сложения, можно осуществить 5+4=9 способами.

Ответ: 9.

Задача 6. У Вовы на обед – первое, второе, третье блюда и пирожное. Он не хочет есть как полагается. Найдите число возможных вариантов обеда.

Решение. Первым блюдом Вова может съесть любое из предложенных (4 варианта),
вторым – одно из оставшихся (три варианта),
третьим – опять одно из оставшихся (два варианта),
а четвертым – то, что осталось.
Таким образом, число вариантов равно $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$.

Ответ: 24.

В предложенной заче ответ находился путем перемножения всех натуральных чисел до того числа, которое показывало число возможных объектов (в первом случае 3, во втором – 4).

Произведение первых подряд идущих n натуральных чисел называется факториал и обозначается n!, причем, если n = 0, считают n! = 1.

Для решения задачи на определение числа возможны перестановок пользуются следующим правилом

n различным элементам можно присвоить номера от 1 до n ровно n! различными способами.

Задача 7. У Лены есть 8 разных красок. Она хочет написать ими слова «Новый Год». Сколькими способами она может это сделать, если каждая буква может быть раскрашена одним цветом и все 8 букв должны быть разные по цвету.

Решение.

Число возможных вариантов равно

$P_n = 8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320$

Ответ: 40320

Перестановки с повторениями.

Задача 8. Сколькими способами можно переставить буквы в следующих словах?

а) «ВЕКТОР»;
б) «ЛИНИЯ»;
в) «ПАРАБОЛА»;
г) «БИССЕКТРИСА»;
д) «МАТЕМАТИКА».

Решение:

а) Так как все буквы слова различны, то всего можно получить 6! слов.

б) В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через $И_1$ и $И_2$. При этом предположении получится 5! = 120 разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв $И_1$ и $И_2$, на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 120 слов разбиваются на пары одинаковых. Поэтому разных слов всего 120:2 = 60.

в) Считая три буквы А этого слова различными ($А_1$, $А_2$, $А_3$), получим 8! разных слов. Однако слова, отличающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы $А_1$, $А_2$, $А_3$ можно переставлять 3! способами, все 8! слов разбиваются на группы по 3! одинаковых. Поэтому разных слов всего $P_n = \frac{8!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 6720$

г) В этом слове три буквы С и две буквы И. Считая все буквы различными, получаем 11! слов. Отождествляя слова, отличающиеся лишь перестановкой букв И, но не С, получаем 11!/2! различных слов. Отождествляя теперь слова, отличающиеся перестановкой букв С, получаем окончательный результат $P_n = \frac{11!}{2! \cdot 3!}$

д) Ответ: $P_n = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$

Выбор нескольких элементов.

Задача 9. В классе 27 учеников, из которых нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу, второй – сходить за мелом, третий – пойти дежурить в столовую?

б) им следует спеть хором?

Решение.

а) В первом случае важен порядок вызова учеников и применимо правило умножения. Один из 27 учеников решает задачу. Один из оставшихся 26 учеников идет за мелом, а один из оставшихся 25 будет дежурным в столовой. Получается $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$ способов вызова.

б) Во втором случае начнем действовать, вызывая учеников по порядку (123). Можно вызвать этих же учеников и в другом порядке, например, (132) или (321). Во всех случаях состав хора будет одним и тем же. Порядок выбора в данном случае нам не важен, а значит число возможных вариантов, полученных в первом случае нужно разделить на количество перестановок из трех элементов. В итоге имеем: $\frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3!} = \frac{17550}{6} = 2925$.

Конечные <u>упорядоченные</u> подмножества, содержащие по m элементов основного множества, называются размещениями из n элементов по m элементов. Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m.

Конечные <u>неупорядоченные</u> подмножества, содержащие по m элементов основного множества, называются сочетаниями из n элементов по m элементов. Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается C_n^m.

Задачи на размещения можно решать пользуясь правилом умножения, но можно вывести формулу для нахождения A_n^m используя факториал.

Один элемент из n можно выбрать n способами. Таким образом: $A_n^1 = n$

Два элемента можно выбрать $A_n^2 = n(n-1)$ способами.

Три элемента можно выбрать $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ способами.

…………………………………………………

Рассуждая аналогично, получаем:

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Задача 10. В классе 30 учеников. Необходимо избрать старосту, культорга и редактора стенгазеты. Сколькими способами это можно сделать, если одно лицо может занимать только один пост.

Решение. В данном случае нам важен порядок выбора каждого ученика, поэтому можно использовать формулу для количества размещений. При этом, n = 30, m = 3.

$$A_{30}^{3} = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360.$$

Ответ: 24360 способов.

Выведем формулу для числа сочетаний. Так как при решении задач на сочетания нам не важен порядок выбранных m элементов, число всех возможных сочетаний меньше числа возможных размещений равно в m! раз. Таким образом:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}.$$

Задача 11. Тренер отбирает 5 спортсменов из 12. Сколькими способами он может составить команду?

Решение. Порядок выбора спортсменов в данном случае не важен. Используем формулу для количества сочетаний, учитывая, что n = 12, m = 5.

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

Ответ: 792 способа.

Бином Ньютона.

Для подсчета числа сочетаний используется числа $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, которые называются биноминальные коэффициенты.

Выясним, какими свойствами обладают эти числа.

Задача 12. Найти C_5^m, где m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Решение.

$$C_5^0 = 1,\ C_5^1 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5,\ C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10,\ C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10,\ C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5,\ C_5^5 = 1.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1) Коэффициенты, равностоящие от начала и конца, равны между собой, т.е. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2) Сумма всех коэффициентов равно 2^n.
3) Сумма коэффициентов, стоящих на четных местах равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Для нахождения биноминальных коэффициентов существует еще один способ, который называется треугольник Паскаля. Рассмотрим его.

Напишем в первой строке число 1.

Под ним еще две единицы.

Для построения треугольника Паскаля пользуемся правилом: *каждое число в треугольнике равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

В данном треугольнике, первая строка считается нулевой и первый элемент в строки тоже. Тогда, в пятой строке треугольника Паскаля можно найти все те коэффициенты, которые мы нашли в предыдущей задаче.

Биноминальные коэффициенты играют в математике большую роль. Именно они являются коэффициентами многочлена при возведении в степень любого двучлена. Всем известно формула сокращенного умножения: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Коэффициенты перед одночленами в данном трехчлене можно найти во второй строке треугольника Паскаля. Аналогично, при возведении в третью степень получаем: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Сделать это значительно проще, чем умножать между собой три скобки, а потом приводить подобные слагаемые. Степени a и b в искомом многочлене располагаются по следующей зависимости: степень a начинается с 3 и уменьшается до 0, степень b наоборот.

Тренировочные упражнения:

1. Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться - каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?
2. На пустую шашечную доску надо поместить две шашки разного цвета. Сколько различных положений могут они занимать на доске?
3. Сколько способов разместить две ладьи на шахматной доске, так, чтобы каждая из них не смогла побить вторую?
4. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо взять, не видя их, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?
5. На международную конференцию приехали 10 делегатов, не понимающих языка друг друга. Какое минимальное число переводчиков потребуется для обслуживания конференции при условии, что каждый переводчик знает только два языка?
6. Перед нами 10 закрытых замков и 10 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Возьмем один из замков, назовем его первым и попробуем открыть его каждым из 10 ключей. В лучшем случае он откроется первым же ключом, а в худшем - только десятым. Сколько нужно в худшем случае произвести проб, чтобы определить какой ключ от какого замка?
7. В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Тема 3.2 Элементы теории вероятностей

Практическое занятие: Решение задач на нахождение вероятности событий

Цель работы: отработка практических навыков нахождения вероятности события.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, У.5, ОК.1, ОК.2, ОК.9, ПК. 1.4, ПК. 1.5, ПК. 3.3, ПК. 3.5.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев, С.Д. Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образовния / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под ред. В.А. Гусева. – 11-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2015.

Теоретический материал:

1. Случайные события. Вероятность события.

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под *испытанием* (опытом) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие». Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие называется *достоверным*, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и *невозможным*, если оно заведомо не произойдет.

Например, выпадение не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение десяти очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

События называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.

Несколько событий в данном опыте образуют *полную систему событий*, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.

События называются равновозможными, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа – события одинаково возможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Численная мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события А обозначается Р(А).

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию А. Тогда *вероятностью* события А называют отношение

m числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу всех исходов данного испытания:

$P(A) = m/ n$.

Эта формула носит название *классического определения вероятности*.

Если В – достоверное событие, то $m= n$ и $P(B) = 1$; если С – невозможное событие, то $m=0$ и $P(C) = 0$; если А – случайное событие, то $m \le n$ и $P(A) \le 1$.

Таким образом, вероятность события заключена в следующих пределах: $0 \le P(A) \le 1$.

Пример № 1. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность событий:

А – появление четного числа очков;

В – появление не менее пяти очков;

С – появление не более 5 очков.

РЕШЕНИЕ:

Опыт имеет 6 равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему.

Событию А благоприятствуют три исхода (выпадение двух, четырех, шести очков), потому $P(A) = 3/6 = ½$.

Событию В – два исхода (выпадение пяти и шести очков), поэтому $P(B) = 2/6= 1/3$.

Событию С – пять исходов (выпадение одного, двух, трех, четырех и пяти очков), поэтому $P(C) = 5/6$.

2. Основные понятия комбинаторики.

Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется размещением из n элементов по m элементов.

Из определения вытекает, что $0 \leq m \leq n$ и что размещения из n элементов по m – это все m-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число размещений из n элементов по m элементов в каждом обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

A_n^m = n (n -1) (n-2) … (n-m+1).

Число размещений из n элементов по m элементов в каждом равно произведению m последовательно убывающих натуральных чисел, из которых большее есть n.

Для краткости произведение первых n натуральных чисел принято обозначать n! (n – факториал):

1 х 2 х 3 …..n = n!

Условились считать, что 0! = 1.

Тогда формулу числа размещений из n элементов по m элементов можно записать и в другом виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример № 2

Сколькими способами собрание, состоящее из 30 человек, может выбрать из присутствующих президиум в составе председателя, секретаря и члена президиума?

РЕШЕНИЕ:

Состав президиума собрания является упорядоченным множеством из 30 элементов по три элемента. Значит, искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по три элемента в каждом:

A_{30}^3 = 30 х 29 х 28 = 24360, или $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = 30 \times 29 \times 28 = 24360$

Перестановки. Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов данного множества обозначают Р … и вычисляют по формуле:

P_n = 1 х 2 х 3… n = n!

Пример № 3

Сколько четырехзначных чисел можно составить из четырех цифр 1, 2, 3, 4 без повторений?

РЕШЕНИЕ:

По условию дано множество из четырех элементов, которые требуется расположить в определенном порядке. Значит, требуется найти количество перестановок из четырех элементов:

P_4 = 1 х 2 х 3 х 4 = 24,

т.е. из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 24 четырехзначных числа (без повторений цифр).

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее m элементов, называется *сочетанием* из n элементов по m элементов.

Таким образом, сочетания из n элементов по m элементов – это все m-элементные подмножества, которые имеют одинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга порядком следования элементов, не считаются различными.

Число подмножеств по m элементов в каждом, содержащихся во множестве из n элементов, т.е. число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом, обозначают

C_n^m и вычисляют по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad \text{или} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Число сочетаний C_n^m обладает свойством $C_n^m = C_n^{n-m} (0 \le m \le n)$.

Так, $C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = (10\times 9\times 8)/(1\times 2\times 3) = 120$

Пример № 4

Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

РЕШЕНИЕ:

Состав каждой бригады является конечным множеством из 12 элементов по 6. Значит, искомое число способов равно числу сочетаний из 12 элементов по 6 в каждом:

$C_{12}^6 = (12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7)/(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6) = 924$

3. Примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример № 5

В урне находятся 6 белых и 5 черных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие А)?

РЕШЕНИЕ:

Здесь число равновозможных независимых исходов составляет:

$n = C_{11}^2 = (11\times 10)/(1\times 2) = 55$. Событию А благоприятствуют $C_6^2 = (6\times 5)/(1\times 2) = 15$ исходов. Следовательно, Р(А) = 15/55 = 3/11.

Пример № 6

В партии из 20 изделий четыре бракованных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий окажется два бракованных (событие В).

РЕШЕНИЕ:

Здесь число равновозможных независимых исходов есть

$n = C_{20}^5 = (20\times 19\times 18\times 17\times 16)/(1\times 2\times 3\times 4\times 5) = 15504$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию В. Среди пяти взятых изделий окажется два бракованных и три стандартных. Два бракованных изделия из четырех можно выбрать $C_4^2 = (4\times 3)/(1\times 2) = 6$ способами, а три стандартных изделия из 16 можно выбрать $C_{16}^3 = (16\times 15\times 14)/(1\times 2\times 3) = 560$ способами. Каждая комбинация бракованных изделий может сочетаться с каждой комбинацией стандартных изделий, поэтому m = 560 x 6 = 3360. Следовательно, $P(B) = 3360/15504 = 70/323 \approx 0,2$

Пример № 7

Девять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом (событие С).

РЕШЕНИЕ:

Здесь число равновозможных независимых исходов $n = P_9 = 9!$ Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию С. Представим себе, что четыре определенные книги связаны вместе. Тогда эту связку можно расположить на полке $P_6 = 6!$ способами (связка плюс остальные пять книг). Внутри связки четыре книги можно переставлять $P_4 = 4!$ способами. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждым из P_6 способов образования связки, т.е. $m = P_6 \times P_4$. Следовательно,

$P(C) = (P_6 \times P_4)/P_9 = 1/21$.

Тема 3.3 Элементы математической статистики

Практическое занятие: Проведение элементарной статистических обработки информации и результатов исследований

Цель работы: отработка практических навыков построения и проверки закона распределения дискретной случайной величины, вычисления основных числовых характеристик дискретных случайных величин и построения многоугольника распределения.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, У.5, ОК.1, ОК.2, ОК.9, ПК. 1.4, ПК. 1.5, ПК. 3.3, ПК. 3.5.

Продолжительность занятия: 2 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев, С.Д. Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образовния / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под ред. В.А. Гусева. – 11-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2015.

Теоретический материал:

1. Дискретные случайные величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять любые заранее неизвестные значения. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется такая, значения которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин. Для описания поведения дискретной случайной величины Xзадают все значения $x_1, x_2, \dots, x_n,$ которые она может принять, и вероятности появления этих значений $p_1, p_2, \dots, p_n,$.

Законом распределения вероятностей (рядом распределения) дискретной случайной величины называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Ряд распределения можно задать графически, откладывая на горизонтальной оси значения X, а на вертикальной – соответствующие им значения вероятностей. Графическое представление ряда распределения называется *многоугольником распределения.*

2. Математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма вида

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \,,$$

где x_i – возможные значения дискретной случайной величины;

p_i – вероятность появления значения x_iі.

3. Свойства математического ожидания:

1. $M(CX) = CM(X); M(C) = C$ где C – произвольная постоянная величина.
2. $M(X_1X_2 \dots X_n) = M(X_1)M(X_2) \dots M(X_n),$ если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины.
3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

4. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение:

Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризуют дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:
$D(X) = \mathrm{M}(X - M(X))^2$.

Дисперсию целесообразно вычислять по формуле
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии:

1. $D(CX) = C^2 D(X)$; $D(C) = 0$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины.
3. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где $\sigma(X)$ – среднее квадратичное отклонение.

Примеры выполнения заданий

Задание. В таблице приведен закон распределения $P(X = x_i) = p_i$ дискретной случайной величины. Требуется:

1) проверить, действительно ли значения, представленные в таблице, являются законом распределения дискретной случайной величины;
2) определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ среднее квадратическое отклонение этой дискретной случайной величины;
3) построить многоугольник распределения.

X	0	1	2	3
p_i	0,29	0,41	0,21	0,09

Решение.

1) Чтобы значения, представленные в таблице, являлись законом распределения дискретной случайной величины, должны быть выполнены два условия:

а) значения следуют в строго возрастающем порядке;

б) сумма всевозможных вероятностей p_i равна единице, т.к. в таблице представленные все возможные значения дискретной случайной величины и они образуют полную группу событий:

$$\sum_{i=1}^{k} P(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 .$$

Проверяем их выполнение.

Условие а) выполнено: значения x_i дискретной случайной величины расположены в строго возрастающей последовательности – $0, 1, 2, 3$.

Проверяем второе условие:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}29 + 0{,}41 + 0{,}21 + 0{,}09 = 1 .$$

Второе условие тоже выполнено.

Значит, в таблице действительно приведен закон распределения дискретной случайной величины.

2) Находим основные характеристики дискретной случайной величины.

Определим математическое ожидание или среднее значение дискретной случайной величины.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}29 + 1 \cdot 0{,}41 + 2 \cdot 0{,}21 + 3 \cdot 0{,}09 = 1{,}10 .$$

Итак, математическое ожидание $a = \bar{x} = M(X) = 1{,}10$.

Для нахождения дисперсии по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ необходимо сначала найти $M(X^2)$ – среднее значение квадрата этой случайной величины. Запишем закон распределения квадрата случайной величины x_i^2:

X^2	0	1	4	9
p_i	0,29	0,41	0,21	0,09

Определим математическое ожидание или среднее значение квадрата дискретной случайной величины x_i^2:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 0 \cdot 0{,}29 + 1 \cdot 0{,}41 + 4 \cdot 0{,}21 + 9 \cdot 0{,}09 = 2{,}06$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 2{,}06 - (1{,}10)^2 = 2{,}06 - 1{,}21 = 0{,}85$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, характеризующее средний разброс значения дискретной случайной величины x_i вокруг ее среднего значения. Оно равно корню квадратному из дисперсии:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}85} \approx 0{,}92.$

3) Построим график распределения случайной величины. Для этого по оси абсцисс откладываем значения заданной случайной величины x_i, а по оси ординат - соответствующие им вероятности p_i.

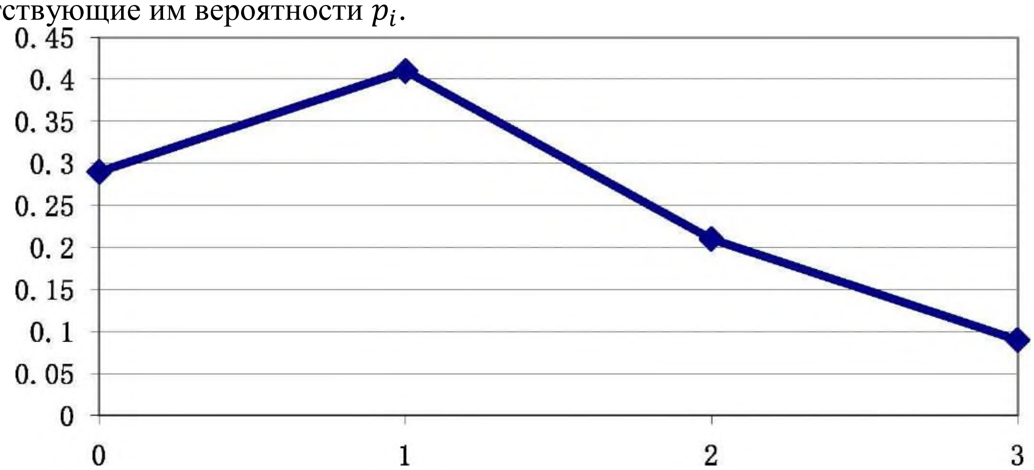


Рис 1. Многоугольник распределения случайной величины.

Ответ: Заданная в условии задачи таблица представляет закон распределения дискретной случайной величины.

Математическое ожидание этой случайной величины $a = \bar{x} = M(X) = 1{,}10$; ее дисперсия $D(X) = 0{,}85$; среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 0{,}92$.

Тренировочные упражнения.

Задание 1. Написать закон распределения случайной величины X - отметки на экзамене для группы, в которой 3 отличника, 12 студентов имеют хорошие и отличные оценки, а 15 студентов имеют удовлетворительные оценки.

Задание 2. Дискретная случайная величина X задана следующей таблицей распределения:

X	2	6	10
p_i	0,5	0,4	0,1

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задание 3. В таблице приведен закон распределения $P(X = x_i) = p_i$ дискретной случайной величины. Требуется:

1) проверить, действительно ли значения, представленные в таблице, являются законом распределения дискретной случайной величины;
2) определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ среднее квадратическое отклонение этой дискретной случайной величины;
3) построить многоугольник распределения.

X	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,02	0,17	0,21	0,26	0,18	0,11	0,05

***Тренировочные упражнения*:**

Задание. В таблице приведен закон распределения $P(X = x_i) = p_i$ дискретной случайной величины. Требуется:

1) проверить, действительно ли значения, представленные в таблице, являются законом распределения дискретной случайной величины;
2) определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и $\sigma(X)$ среднее квадратическое отклонение этой дискретной случайной величины;
3) построить график этого закона распределения вероятностей.

№ варианта	***Закон распределения***							
1	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,01	0,12	0,23	0,28	0,19	0,11	0,06
2	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,20	0,31	0,24	0,13	0,07	0,04	0,01
3	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,04	0,08	0,32	0,31	0,15	0,08	0,02
4	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,42	0,23	0,15	0,10	0,06	0,03	0,01
5	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,03	0,29	0,12	0,15	0,21	0,16	0,04

№ варианта	Закон распределения							
6								
	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,05	0,12	0,18	0,30	0,18	0,12	0,05
7								
	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,06	0,08	0,12	0,24	0,33	0,14	0,03
8								
	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,16	0,25	0,25	0,16	0,10	0,05	0,03
9								
	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,02	0,38	0,30	0,16	0,08	0,04	0,02
10								
	X	0	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,08	0,10	0,14	0,17	0,19	0,18	0,14

Практическое занятие Применение статистических методов для решения профессиональных задач.

Цель работы: отработка практических навыков предварительной обработки статистических данных и вычисления характеристик выборочного распределения.

Приобретаемые умения и формируемые компетенции: У.1, У.5, ОК.1, ОК.2, ОК.9, ПК. 1.4, ПК. 1.5, ПК. 3.3, ПК. 3.5.

Продолжительность занятия: 4 часа.

Информационное обеспечение занятия:

- Григорьев, С.Д. Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образовния / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под ред. В.А. Гусева. – 11-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2015.

Теоретический материал:

Предварительная обработка статистических данных

Пусть имеется генеральная совокупность случайной величины X необходимо по имеющейся выборке оценить основные числовые характеристики случайной величины.

Прежде чем ответить на эти вопросы, необходимо провести предварительную обработку статистических данных, которая позволяет значительно облегчить решение поставленных задач.

Предположим, что из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n. Так как выборка случайна, то некоторые значения в выборке могут совпадать. Пусть значение x_1, наблюдается n_i раз, $x_2 - n_2$ раз, ... , $x_m - n_m$ раз. Значения x_1, x_2, ..., x_m называются вариантами. Одно из самых простых преобразований статистических данных является их упорядочение по значениям (вариантам). Если варианты записаны в возрастающем порядке, то их называют вариационным рядом.

Числа $n_1,\ n_2, \dots, n_m$ называются частотами, сумма частот равна объему выборки, т.е.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n\,.$$

Пусть дан вариационный ряд

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

Модой Mo называется варианта, имеющая наибольшую частоту. *Медианой* Me является варианта, делящая вариационный ряда на две равные части по количеству вариант, при этом:

– если число вариант нечетное, т.е. $n = 2k + 1$, то

$Me = x_{k+1}$;

Если число вариант четно, т.е. $n = 2k$, то

$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями выборки называют *размахом* выборки.

Отношения $w_1 = \frac{n_1}{n}, w_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, w_m = \frac{n_m}{n}$, называются *относительными частотами* (статистическими вероятностями) соответствующих вариант. Сумма относительных частот равна 1.

$$\sum_{i=1}^{m} w_1 = 1$$

Данные вариационного ряда обычно записываются в виде статистических таблиц.

В таблице распределения частот в первой строке записывают значения выборки, а во второй строке – соответствующие частоты:

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

В таблице распределения относительных частот в первой строке записывают значения выборки, а во второй строке – соответствующие относительные частоты:

x_i	x_1	x_2	...	x_m
w_i	w_1	n_2	...	w_m

Точечные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия

Пусть из генеральной совокупности случайной величины X произведена выборка x_1, $x_2, \dots, x_m$ объемом n.

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

Для характеристики наиболее существенных свойств этого распределения используют средние показатели: выборочная средняя $\bar{x}_\text{в}$, выборочная дисперсия $D_\text{в}$.

Выборочной средней $\bar{x}_\text{в}$ называется среднее арифметическое значение выборки:

– если варианты $x_1,\ x_2, \dots, x_m$ имеют частоты $n_1,\ n_2, \dots, n_m$, то

$$\bar{x}_\text{в} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i n_i\,,$$

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$;

– если варианты $x_1,\ x_2, \dots, x_m$ различны $(n = m)$, то

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i .$$

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений выборки $D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n}$, если известны частоты соответствующих вариант, или $D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{m}$, если все варианты имеют различные значения.

Для характеристики рассеивания значений выборки применяют *выборочное среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} .$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{в}}$ – показатель надежности выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$. Чем меньше среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{в}}$, тем точнее выборочная средняя $\bar{x}_{\text{вв}}$ отражает всю генеральную совокупность случайной величины X.

Точная оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Так как выборка осуществляется случайно, то возможно отклонение (смещение) числовых характеристик выборки от соответствующих числовых характеристик генеральной совокупности случайной величины X.

Для получения несмещенной оценки применяют исправленную выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 ,$$

более удобная форма для вычисления исправленной выборочной дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - [\sum_{i=1}^{m} n_i x_i]/n}{n-1} .$$

Несмещенной оценкой для математического ожидания является выборочная средняя

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i x_i .$$

Для вычисления $\bar{x}_{\text{в}}$ и $D_{\text{в}}$ можно применять вычислительную схему-таблицу следующего вида:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \bar{x}_{\text{в}})$	$(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2$	$(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 n_i$
	$n = \sum$	$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum}{n}$			$\bar{D}_{\text{в}} = \frac{\sum}{n}$

Примеры выполнения заданий

Задача 1. Случайная выборка среди абитуриентов на приемных экзаменах дала следующие набранные ими баллы: 13, 12, 14, 11, 11, 12, 14, 10, 12, 13, 11, 15, 10, 13, 11, 12, 14, 12, 12, 11. Построить для данной выборки таблицу распределения частот и таблицу распределения относительных частот, определить моду, медиану и размах выборки.

Решение. Составим вариационный ряд, для этого расположим данные выборки в возрастающем порядке: 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15.

Числа $x_1 = 10$, $x_2 = 10$, $x_3 = 12$, $x_4 = 13$, $x_5 = 14$ и $x_6 = 15$ являются вариантами с частотами: $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 3$, $n_5 = 3$, и $n_6 = 1$. Так как наибольшая частота равна 6 соответствует варианте $x_3 = 12$, то мода $Mo = 12$.

Так как количество вариант четно, то медиана $Me = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{12+13}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Размах выборки равен $x_6 - x_1 = 15 - 10 = 5$.

Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 20$.

Относительные частоты: $w_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1$; $w_2 = \frac{5}{20} = 0{,}25$; $w_3 = \frac{6}{20} = 0{,}3$; $w_4 = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $w_5 = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $w_6 = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Полученные данные сведем в соответствующие таблицы.

Таблица распределения частот:

x_i	10	11	12	13	14	15
n_i	2	5	6	3	3	1

Таблица распределения относительных частот:

x_i	10	11	12	13	14	15
n_i	0,1	0,25	0,3	0,15	0,15	0,05

Задача 2. Из генеральной совокупности извлекли выборку 6; 1; 2; 3; 3; 2; 2; 4; 5; 3; 1; 3. Оценить генеральные характеристики с помощью данной выборки.

Решение.

Для оценки генеральных характеристик необходимо вычислить выборочные характеристики.

Данную выборку запишем в виде выборочного ряда: 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 6. Ясно для значения $x_1 = 1$ частота $n_1 = 2$; для $x_2 = 2$ частота $n_2 = 3$; для $x_3 = 3$ частота $n_3 = 4$; для $x_4 = 4$ частота $n_4 = 1$; для $x_5 = 5$ частота $n_5 = 1$ и для значения $x_6 = 6$ частота $n_6 = 1$.

Выборочное распределение представим в виде таблицы

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	4	1	1	1

Объем выборки $n = \sum n_i = 2 + 3 + 4 + 1 + 1 + 1 = 12$

Для вычисления выборочных характеристик используем формулы, а расчеты оформим в расчетную таблицу.

x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \bar{x}_в)$	$(x_i - \bar{x}_в)^2$	$(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i$
1	2	2	-1,92	3,69	7,37
2	3	6	-0,92	0,85	2,55
3	4	12	0,08	0,006	0,03
4	1	4	1,08	1,17	1,17
5	1	5	2,08	4,33	4,33
6	1	6	3,08	9,49	9,49
	$n = 2$	$\frac{35}{12} = 2{,}92$			$\frac{24{,}94}{12} = 2{,}08$

$$S^2 = \frac{12}{12-1} \cdot 2{,}08 = 2{,}27$$

***Ответ*:** генеральные характеристики можно оценить с помощью выборочных характеристик выборочная средняя генеральной совокупности равна 2,92, выборочная дисперсия генеральной совокупности равна 2,27.

***Задача* 3.**

При исследовании партии картофеля было проведено n проб и полученные данные о содержании крахмала в клубнях в x % приведены в таблице. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	16,2	20,1	21,4	18,9	16,5	17,3	18,2	19,5	20,4	21,	18,2	19,4

Решение. Обработку результатов наблюдений сведем к заполнению следующей таблицы.

№	x_i	$(x_i - \bar{x}_в)$	$(x_i - \bar{x}_в)^2$
1	16,2	-2,73	7,4256
2	20,10	1,18	1,3806
3	21,40	2,48	6,1256
4	18,90	-0,03	0,0006
5	16,50	-2,43	5,8806
6	17,3	-1,63	2,6406
7	18,20	-0,73	0,5256
8	19,50	0,57	0,3306
9	20,40	1,48	2,1756
10	21,0	2,08	4,3056
11	18,2	-0,73	0,5256
12	19,4	0,47	0,2256
$\sum$	227,1	—	31,5425

1. Первые два столбца заполняются исходными данными.
2. В последней строке второго столбца записываем сумму всех чисел этого столбца

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 227{,}10$$

3. Вычисляем выборочное среднее по формуле

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{227{,}1}{12} = 18{,}925\,.$$

4. В каждую строку третьего столбца заносим величину $(x_i - \bar{x}_в)$.
5. В каждую строку четвертого столбца заносим величину $(x_i - \bar{x}_в)^2$ и в последней строке вычисляем сумму чисел этого столбца:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2$$

6. Вычисляем выборочную дисперсию по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{31{,}5425}{12-1} = 2{,}8675\,.$$

7. Вычисляем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{2{,}8675} = 1{,}69\,.$$

Тренировочные упражнения:

***Задача* 1.** По заданной выборке составить статистические таблицы (таблицу распределения частот и таблицу распределения относительных частот): 0; 1; 3; 2; 3; 4; 2; 5;

4; 5; 3; 3; 2; 3; 0; 1; 0; 3; 5; 2; 4; 1; 2; 1; 3.

Задача **2.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 60$.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку математического ожидания генеральной совокупности.

Задача **3.** Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объемом $n = 20$.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Задача **4.** В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную выборочную дисперсии ошибок прибора.

Тонировочные упражнения:

Задание. 12 школьников выполняют броски в корзину; каждый школьник имеет 10 попыток. Результаты бросков (число попаданий) представлены следующим рядом:

№ варианта	***Выборка***
1	6, 5, 4, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 4
2	8, 7, 6, 6, 8, 8, 4, 4, 3, 2, 2, 7
3	8, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 8, 1, 2
4	5, 4, 3, 2, 5, 3, 2, 2, 5, 5, 4, 1
5	8, 4, 4, 2, 6, 8, 8, 4, 5, 6, 6, 2
6	1, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 5, 4, 6
7	3, 6, 9, 8, 5, 3, 6, 6, 9, 9, 9, 8
8	7, 5, 4, 3, 3, 7, 7, 4, 2, 3, 7, 5
9	3, 2, 1, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 6, 1
10	2, 3, 4, 4, 1, 2, 3, 6, 4, 3, 3, 1

а) По заданной выборке составить статистические таблицы (таблицу распредления частот и таблицу распределения относительных частот);

б) Рассчитать числовые характеристики: размах выборки, моду, медиану, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение.